Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра Математической теории игр и статистических решений

Лонягина Юлия Евгеньевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Модели координации многоуровневых распределительных цепей поставок

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Зенкевич Н. А.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Введение 3

Постановка задачи 6

Обзор литературы 15

Глава 1. Теоретико-игровая модель многоуровневой децентрализованной цепи поставок 17

1.1. Формализация децентрализованной многоуровневой цепи поставок 17

1.2. Решение децентрализованной двухуровневой игры 19

1.3. Равновесие по Нэшу в многоуровневой децентрализованной игре 25

Глава 2. Модели координации централизованной многоуровневой цепи поставок 31

2.1. Формализация первой модели координации централизованной многоуровневой цепи поставок 31

2.2. Теоретический анализ нелинейной задачи оптимизации... 33

2.3. Сравнение решений в централизованной и децентрализованной моделях многоуровневых цепей поставок на основе численного моделирования 36

2.4. Формализация модели координации централизованной многоуровневой цепи поставок на основе арбитражного решения Нэша 42

2.5. Сравнение взвешенного арбитражного решения Нэша с ранее рассмотренными решениями на основе численного моделирования 45

Выводы 48

Список литературы 50

Приложения 51

Введение

Современный мир прочно связан с торговлей и бизнесом, неотъемлемой частью которых являются цепи поставок. Необходимость фирм после производства реализовывать свой товар вынуждает их налаживать операционную деятельность, организовывая системы товарных потоков и торговых связей. И с каждым годом под действием прогресса и глобализации растет не только количество этих систем, но и сложность, а именно структура и масштабность. Также возникают задачи оптимизации уже организованных цепей поставок, однако важность решения таких проблем иногда бывает недооцененной. В результате, плохо организованная операционная деятельность приводит к убыткам или нереализованной прибыли. Отсюда следует, что не только широкая распространенность цепей поставок, но и важность решения задач их оптимизации по критерию прибыли делает проблему координации участников цепей поставок как нельзя актуальной. В виду этого, целью данной работы является разработка способа координации участников с целью оптимизации цепи поставок по критерию прибыли.

В данной работе исследуется один из наиболее универсальных и часто встречающихся видов цепей поставок – многоуровневые цепи поставок с древовидной распределительной структурой (пример такой цепи изображен на Рис. 1). Задача координации таких цепей не является хорошо изученной, т.к. моделирование цепей поставок именно с такой структурой началось относительно недавно.

Нами будет рассмотрено два подхода к координации участников, основанных на моделях их поведения и взаимодействия – децентрализованной и централизованной. Для каждого подхода мы описываем процесс принятия решения, на основании этого формулируем критерий оптимальности и приводим способ построения решения, удовлетворяющего этому критерию.

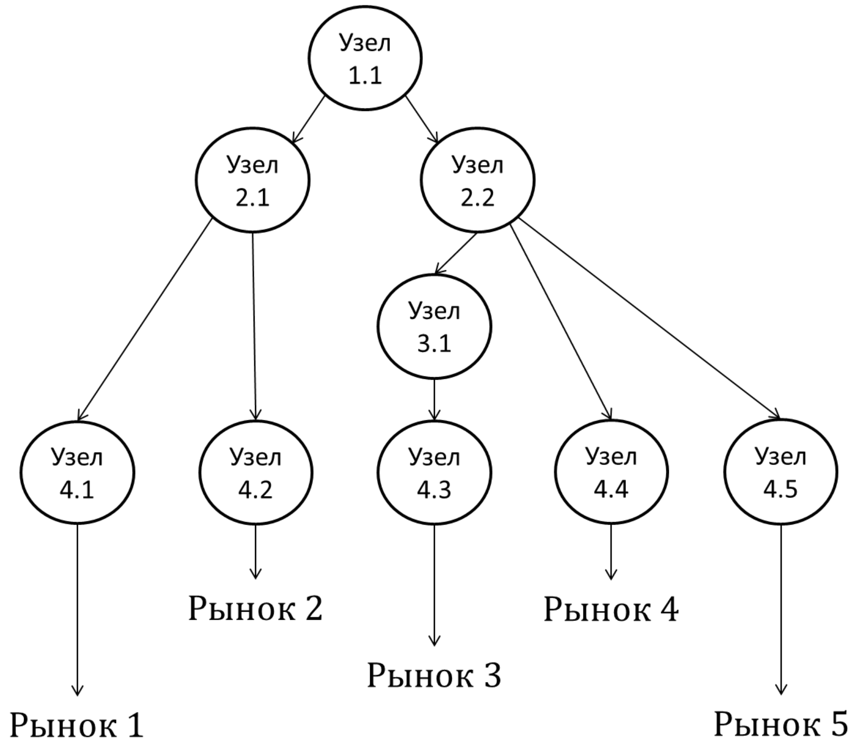


Рис. 1. Пример многоуровневой цепи поставок с древовидной дистрибутивной структурой

В разделе «Постановка задачи» данной работы произведена математическая формализация цепей поставок, сформулированы критерии оптимальности решения в рамках каждой из моделей организации поведения участников в цепи поставок.

В Главе 1 рассмотрена децентрализованная модель многоуровневой цепи поставок с древовидной структурой и приведен алгоритм нахождения решения задачи координации данного вида цепей.

Вторая глава данной работы посвящена задаче координации централизованной модели цепей поставок с рассматриваемой структурой: здесь исследуется вопрос существования решения задачи нелинейной условной оптимизации, к которой сводится задача координации таких цепей, также обосновывается причина рассмотрения альтернативной формулировки оптимизационной задачи, и далее на конкретном примере производится сравнение результатов всех предлагаемых решений.

Итоги проделанной работы резюмируются в разделе «Выводы», а также в разделе «Приложения» приводится код программы, написанной в среде MATLAB, которая реализует алгоритмы нахождения решения задачи координации обоих моделей цепи поставок.

Постановка задачи

Пусть множество X – заданное конечное множество.

Определение 1. Правило f, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $f(x) \in X$, называется *однозначным отображением* X в X или функцией, определенной на X и принимающей значения в X.

Определение 2. *Многозначным отображением* F множества X в X будем называть правило, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ некоторое подмножество $F_x \subset X$, при этом $F(\emptyset) = \emptyset$. Далее под термином «отображение» из X в X будем понимать «многозначное отображение» [1].

Пусть F – отображение X в X, и $A \subset X$.

Определение 3. Под *образом множества* $A \subset X$ будем понимать множество $F(A) \triangleq \bigcup_{x \in A} F_x$.

Можно убедиться, что если $A_i \subset X, i = 1, \dots, n$, то

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} F(A_i), \qquad F\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} F(A_i).$$

Определим отображения $F^1, F^2, \dots, F^k, \dots$ итеративным образом:

$$F_x^1 = F_x, F_x^2 \triangleq F(F_x), F_x^3 \triangleq F(F_x^2), \dots, F_x^k \triangleq F(F_x^{k-1}), \dots$$

Определение 4. Отображение $\hat{F}$ множества X в X называется *транзитивным замыканием* отображения F, если

$$\widehat{F_x} \triangleq \{x\} \cup F_x^1 \cup F_x^2 \cup \dots \cup F_x^k \dots \quad .$$

Отображение F^{-1}, обратное отображению F, определяется как

$$F_y^{-1} \triangleq \{x | y \in F_x\}.$$

Аналогично отображению F^k определяется отображение $(F^{-1})^k$:

$$(F^{-1})_y^2 = F^{-1}\big((F^{-1})_y\big),$$

$$(F^{-1})_y^3 = F^{-1}\big((F^{-1})_y^2\big), \dots, (F^{-1})_y^k = F^{-1}\big((F^{-1})_y^{k-1}\big).$$

Если $B \subset X$, то полагаем $F^{-1}(B) \triangleq \{x | F_x \cap B \neq \emptyset\}$.

Определение 5. Пара (X, F) называется *графом*, если X – некоторое конечное множество, а F – отображение X в X. Граф (X, F) также будем обозначать символом G [1].

В дальнейшем элементы множества X будем изображать кругами на плоскости, а пары кругов x и y, для которых $y \in F_x$, соединять отрезком со стрелкой, направленным от x к y.

Тогда каждый элемент множества X будем называть *вершиной* или *узлом* графа, а пару элементов (x, y), в которой $y \in F_x$ – *дугой* графа. Для дуги $p = (x, y)$ вершины x и y являются *граничными вершинами дуги*, причем x – *начало*, а y – *конец дуги*. Две дуги p и q называются *смежными*, если они различны и имеют общий граничный узел. Множество всех дуг графа будем обозначать P.

Ребром графа называется множество из двух элементов $x, y \in X$, для которых или $(x, y) \in P$ или $(y, x) \in P$. В отличие от дуги в ребре ориентация роли не играет. Под *цепью* будем понимать последовательность ребер $(q_1, q_2, \ldots)$, в которой у каждого ребра q_k одна из граничных вершин является также граничной для q_{k-1}, а другая – граничной для q_{k+1}.

Цикл – это конечная цепь, начинающаяся в некоторой вершине и оканчивающаяся в той же вершине. Граф будем называть *связным*, если любые две его вершины можно соединить цепью.

Определение 6. Дерево или *древовидный граф* $G = (X, F)$ – это конечный связный граф без циклов, имеющий не менее двух вершин, в котором существует единственная вершина x^1, такая что $\hat{F}_{x^1} = X$. Вершина x^1 называется *начальной* вершиной графа G, или также будем называть её *корневой* [1].

Далее мы будем рассматривать графы, имеющие только древовидную структуру. Примером дерева может быть граф, изображенный на Рис. 2.

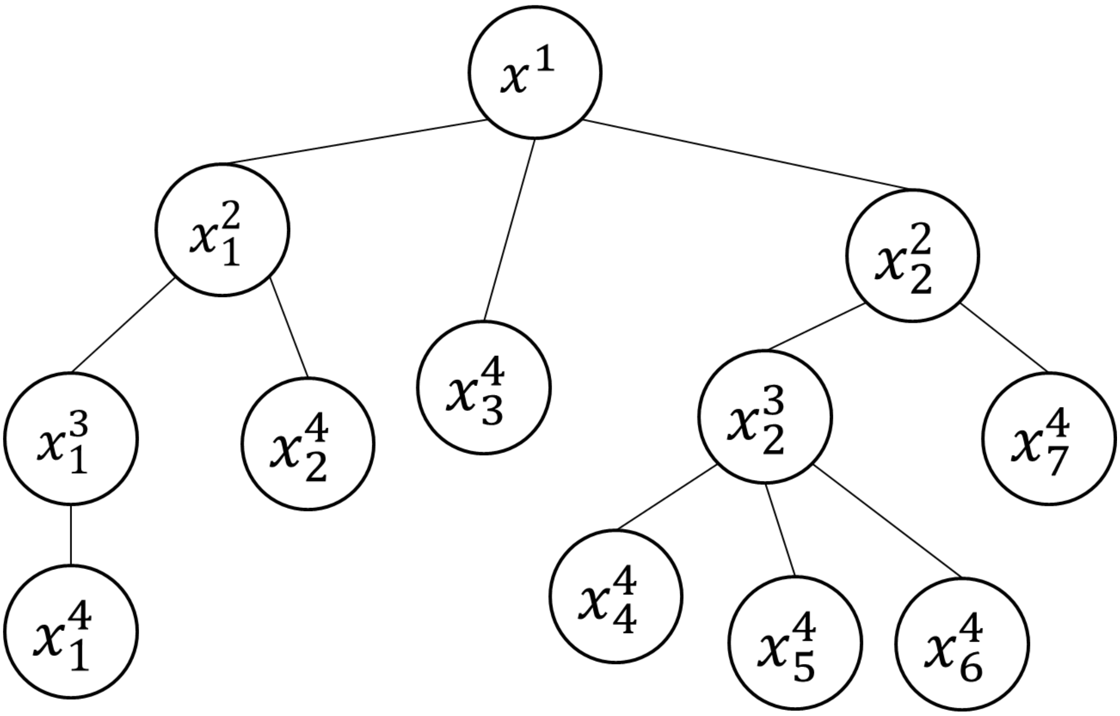


Рис. 2. Дерево или древовидный граф

На множестве вершин X дерева $G = (X, F)$ зададим множества $X_1, \dots, X_l,\ X_i \subset X$ следующим образом:

$$X_1 = \{x^1\}, X_l = \{x \in X |\ F_x = \emptyset\},$$
$$X_{k+1} = (F_x \backslash X_l) \text{ для } x \in X_k, k = \overline{1, l-2}, \text{ если } (F_x \backslash X_l) \neq \emptyset. \tag{1}$$

Утверждение. Введенные множества задают разбиение множества X, т.е. $\bigcup_{i=1}^{l} X_i = X, X_e \cap X_r = \emptyset, e \neq r$.

Доказательство. Покажем, что множества $X_1, \dots, X_l$ попарно не пересекаются. По определению древовидного графа множество X состоит не менее чем из двух вершин, следовательно, существует вершина $x \in X, x \neq x^1$ такая, что $F(x^1) = x$. Тогда $F_{x^1} \neq \emptyset$, и, значит, $X_1 \cap X_l = \emptyset$. Из построения множеств $X_k, k = \overline{2, l-1}$ следует, что $X_k \cap X_l = \emptyset$.

По определению граф G не содержит циклов и имеет единственную вершину x^1, из которой существует цепь в любую другую вершину графа. Тогда для любых $x, y \in X \backslash X_l$ следует, что $F_x \cap F_y = \emptyset$. От противного, пусть $F_x \cap F_y \neq \emptyset$, пускай для определенности $F_x \cap F_y = \{z \in X\}$, тогда мы имеем цикл:

$$x^1 \to \cdots \to x \to z \to y \to \cdots \to x^1,$$

что противоречит тому, что G – дерево. Тогда, если множества F_x и F_y не пересекаются ни для какой пары $x, y \in X \backslash X_l$, то и их подмножества

$$(F_x \backslash X_l) \subset F_x \text{ и } (F_y \backslash X_l) \subset F_y$$

не пересекаются для любой пары $x, y \in X \backslash X_l$. Значит,

$$X_e \cap X_r = \emptyset \quad \begin{matrix} e \neq r \\ e, r = \overline{2, l-1} \end{matrix}.$$

В виду того, что x^1 – корневая вершина, то x^1 не принадлежит ни одному F_x для любого $x \in X$. Следовательно, $X_1 \cap X_i = \emptyset, i = \overline{2, l}$. Таким образом, утверждение о попарном непересечении множеств доказано.

Рассмотрим множество

$$\bigcup_{i=2}^{l} X_i = \left(\bigcup_{i=2}^{l-1} (F(X_{i-1}) \backslash X_l) \right) \bigcup X_l = \left(\bigcup_{i=2}^{l-1} F(X_{i-1}) \right) \bigcup \left(X_l \backslash \bigcup_{i=2}^{l-1} F(X_{i-1}) \right).$$

Заметим, что

$$X_l \backslash \bigcup_{i=2}^{l-1} F(X_{i-1}) = F(X_{l-1}),$$

т.к. G – связный граф. Тогда

$$\left(\bigcup_{i=2}^{l-1} F(X_{i-1}) \right) \bigcup X_l = \bigcup_{i=2}^{l} F(X_{i-1}) = F_{x^1} \cup F_{x^1}^2 \cup \dots \cup F_{x^1}^{l-1}.$$

Следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{l} X_i = \{x^1\} \cup F_{x^1} \cup F_{x^1}^2 \cup \dots \cup F_{x^1}^{l-1} = \hat{F}_{x^1} = X.$$

Утверждение доказано.

Определение 7. Подмножество узлов $X_i \subset X, i = 1, \dots, l$ будем называть *множеством вершин (узлов) уровня* i. Узлы из множества X_l также будем называть *концевыми* или *конечными*.

Обозначать узлы x из множества X будем как x_j^i, где верхний индекс соответствует номеру уровня X_i, на котором расположена эта вершина, а нижний индекс – порядковому номеру этой вершины во множестве X_i. Для единообразия корневой узел x^1 будем обозначать x_1^1.

Например, для графа, изображенного на Рис. 2, $l = 4$, и множество узлов X имеет следующее разбиение на уровни:

$$X_1 = \{x^1 = x_1^1\};\ X_2 = \{x_1^2, x_2^2\};\ X_3 = \{x_1^3, x_2^3\};\ X_4 = \{x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4, x_5^4, x_6^4, x_7^4\}.$$

Также под m_i будем понимать *количество узлов уровня* i, т.е. $m_i = |X_i|$, где $|X_i|$ – мощность множества X_i

Определение 8. Будем говорить, что разбиение $X_1, \ldots, X_l$ множества вершин X, определенное по правилу (1), задает *цепь поставок с древовидной распределительной (дистрибутивной) структурой*.

Для наглядности узлы цепи поставок одного уровня графически будем изображать кругами, лежащими на одной горизонтальной прямой, а уровни располагать последовательно один под другим (см. Рис. 3).

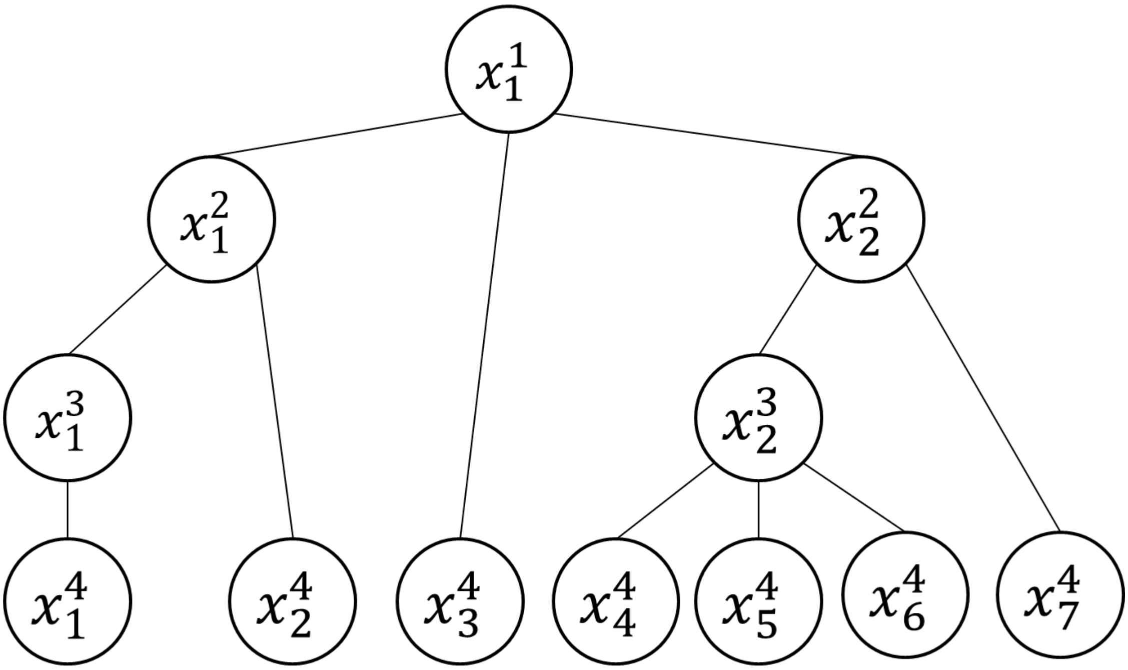


Рис. 3. Пример изображения древовидной цепи поставок

Определение 9. Сектором вершины $x_j^i \in X \backslash X_l$ будем называть множество $F_{x_j^i}$.

Множество секторов вместе с корневой вершиной задают разбиение на множестве вершин X, т.к. из доказательства утверждения следует, что

$$F_{x_j^i} \cap F_{x_h^r} = \emptyset,$$

для любой пары вершин $x_j^i, x_h^r \in X$, где или $i \neq r$, или $j \neq h$; а из связности графа $G = (X, F)$ вытекает, что

$$\left(\bigcup_{i=1}^{l} \bigcup_{j=1}^{m_i} F_{x_j^i}\right) \bigcup X_1 = X.$$

Так, например, в цепи поставок, изображенной на Рис. 3, сектором корневой вершины x_1^1 является множество $\{x_1^2, x_3^4, x_2^2\}$, сектором вершины x_1^2 – множество $\{x_1^3, x_2^4\}$, вершины x_2^2 – множество $\{x_2^3, x_7^4\}$, вершины x_1^3 – множество $\{x_1^4\}$, а вершины x_2^3 – множество $\{x_4^4, x_5^4, x_6^4\}$.

Под множеством S_j^i будем понимать множество пар индексов тех узлов, которые входят в сектор узла $x_j^i \in X \setminus X_l$, т.е. $S_j^i = \left\{(k, h) \mid x_h^k \in F_{x_j^i}\right\}$. Заметим, что по построению $S_j^i \neq \emptyset$.

Пусть каждая вершина x_j^i, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, m_i}$ цепи поставок состоит из конечной совокупности элементов $\left\{x_{jk}^i\right\}_{k=1}^{n_{ij}}$, для которой также определен массив $\left\{v_{ijk}\right\}_{k=1}^{n_{ij}}$, $\forall k: v_{ijk} \geq 0$, где n_{ij} – некоторое натуральное число, не меньшее единицы. Эта совокупность элементов содержательно является группой конкурирующих фирм, производящих и потребляющих однородный продукт, а также имеющих разные затраты v_{ijk} на производство (мощности производства считаются неограниченными). Для каждой фирмы $x_{jk}^i \in x_j^i$ введем переменную $q_{ijk} \geq 0$, характеризующую переменный объем выпуска этой фирмы, а суммарный объем однородного продукта, произведенный всеми фирмами $\left\{x_{jk}^i\right\}_{k=1}^{n_{ij}}$ из узла x_j^i, обозначим за $Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}$. Тогда, для сектора каждого узла $x_j^i \in X \setminus X_l$ цепи поставок, считается выполненным условие

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk} = \sum_{r,h:(r,h)\in S_j^i} Q_{rh} = \sum_{r,h:(r,h)\in S_j^i} \sum_{t=1}^{n_{rh}} q_{rht}, \qquad (2)$$

означающее, что в цепи поставок нет дефицита и излишков производства.

Для каждого узла $x_j^i \in X$ введем переменную p_{ij}, эквивалентную по смыслу цене, по которой фирмы $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}}$ из узла x_j^i продают единицу производимого товара. Считается, что для каждой из концевых вершин $x_j^l \in X_l$ задана линейная функция вида

$$p_{lj} = a_{lj} - b_{lj} Q_{lj}, \qquad (3)$$

где $a_{lj} > 0, b_{lj} > 0$. Фактически это означает, что концевые вершины реализуют свой продукт на неконкурирующих потребительский рынках, функционирующих по модели Курно с линейной зависимостью, выражающейся формулой (3).

Определение 10. Набор значений $\left(\{q_{ijk}\}_{i,j,k}, \{p_{ij}\}_{i,j}\right)$ определяет *товарный поток* d в цепи поставок.

Определение 11. Поток d будем называть *допустимым*, если

$$p_{lj} > 0, Q_{lj} > 0, \qquad j = \overline{1, m_l}.$$

Пусть множество D – множество всех допустимых потоков в цепи поставок. Для каждой фирмы $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}} \in x_j^i$ для $i = \overline{1,l}, j = \overline{1,m_\iota}$ определим функцию π_{ijk} – функцию прибыли, заданную на множестве D всех допустимых товарных потоков, следующим образом:

$$\pi_{ijk}(d) = \begin{cases} q_{11k}(p_{11} - v_{11k}), \text{если } i = 1; \\ q_{ljk}\left(a_{lj} - b_{lj}Q_{lj} - p_{rh} - v_{ljk}\right), \text{если } i = l; \\ q_{ijk}\left(p_{ij} - p_{rh} - v_{ijk}\right), \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

где p_{rh}: $x_j^i \in S_h^r$.

Упорядочим множество вершин X цепи поставок: на первом месте корневая вершина, затем узлы второго уровня по возрастанию порядковых номеров, далее – третьего, четвертого и так далее до конечного включительно, т.е. мы получаем упорядоченный набор $\{x_1^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m_l}^l\}$. Это упорядоченное множество всех узлов (обозначим его N) цепи поставок будем считать множеством игроков, причем предполагаются возможными два способа организации их взаимодействия – децентрализованный и централизованный. В первом случае мы имеем дело с ситуацией, когда каждый игрок действует независимо от других в угоду только собственным интересам. Во втором же случае все игроки образуют коалицию и действуют централизованно с целью достижения общей цели.

Множеством U_{ij} *стратегий игрока* x_j^i будем считать множество всевозможных векторов $u_{ij} \in D$, где u_{ij} составлен из упорядоченного набора переменных, определенных для всех фирм $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}} \in x_j^i$ и лежащих в пределах области, задающей допустимый поток, т.е.

$$U_{ij} = \left[\begin{array}{l} \left\{u_{ij} = \left(q_{ij1}, \dots, q_{ijn_{ij}}, p_{ij}\right) \in D\right\}, \text{для } x_j^i \in N, i = \overline{1, l-1}, j = \overline{1, m_l}; \\ \left\{u_{lj} = \left(q_{lj1}, \dots, q_{ljn_{lj}}\right) \in D\right\}, \text{для } x_j^l \in N, j = \overline{1, m_l}. \end{array}\right. \qquad (4)$$

Пусть задана децентрализованная модель многоуровневой цепи поставок с древовидной дистрибутивной структурой.

Определение 12. Допустимый поток d^* будем называть *оптимальным*, если выполняется

$$\pi_{ijk}(d^*) \geq \pi_{ijk}\left(d^{ij}\right), \qquad \forall i = \overline{1, l}, j = \overline{1, m_\iota}, k = \overline{1, n_{\iota J}}, \qquad (5)$$

где d^{ij} – это поток, порожденный отклонением стратегии u_{ij} игрока x_j^i.

Поставим задачей найти оптимальный поток d^* в цепи поставок, а саму задачу будем называть *задачей координации децентрализованной модели многоуровневой цепи поставок с древовидной дистрибутивной структурой и линейными функциями спроса*.

Пусть теперь задана централизованная модель многоуровневой цепи поставок с древовидной дистрибутивной структурой. Рассмотрим первый подход к формулировке задачи координации этой цепи. Целью коалиции из всех игроков будем считать максимизацию функции $\Pi(d)$ общей прибыли цепи поставок, определяемую как сумму функций прибыли каждого игрока:

$$\Pi(d) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \pi_{ijk}(d),$$

при заданных линейных функциях спроса. Тогда *задачей координации многоуровневой централизованной цепи поставок с древовидной дистрибутивной структурой и линейными функциям спроса* является нахождение такого допустимого потока $\hat{d}$, для которого выполняется

$$\underset{d \in D}{argmax}\, \Pi(d) = \hat{d}. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь второй подход к формулировке задачи координации централизованной цепи поставок.

Определение 13. Точкой «статус кво» будем называть упорядоченный набор $\left(\pi_{111}^*, \pi_{112}^*, \dots, \pi_{lm_l n_{lm_l}}^*\right)$, где $\pi_{ijk}^* = \pi_{ijk}(d^*)$, d^* - оптимальный поток из определения 12.

Построим функцию

$$\Phi(d) = \prod_{i=1}^{l} \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{k=1}^{n_{ij}} \left(\pi_{ijk}(d) - \pi_{ijk}^*\right)^{\alpha_{ijk}},$$

где α_{ijk} – некоторые числа, такие, что $\alpha_{ijk} > 0, \forall i = \overline{1,l}, j = \overline{1,m_\iota}, k = \overline{1,n_{\iota J}}$ и

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \alpha_{ijk} = 1.$$

Тогда второй задачей координации многоуровневой централизованной цепи поставок с древовидной дистрибутивной структурой и линейными функциям спроса является нахождение такого допустимого потока d^N, для которого выполняется

$$\underset{d \in D}{arg\max}\, \Phi(d) = d^N. \quad (7)$$

Обзор литературы

Распространенность цепей поставок во многих сферах торговли и бизнеса очень часто делает их предметом изучения многих экономистов, менеджеров и ученых. Впервые рассматривать задачу управления цепочками поставок как концепцию, заключающуюся в интегрированном подходе к планированию и управлению информационными и товарными потоками, а также услугами, предложил Кейт Оливер [8] в 1982 году и использовал такое понятие как менеджмент цепей поставок. Концепция была быстро принята и получила широкое распространение и развитие.

Первые работы в сфере менеджмента цепей поставок были направлены на изучение децентрализованных моделей, т.е. цепей поставок, в которых все участники действуют независимо. К таким работам, например, относятся статьи Зисса С. [12], Викерса Д. [10] и Тьяги Р. К. [9].

Затем интересы ученых привлекла тема кооперации участников цепи и управление рисками. Кахон Г.П. [3] исследовал вопрос влияния координирующих контрактов, а Кайя М. и Озер О. [7] – тему контрактирования цепи для дележа рисков, прибыли и информации. Параллельно с этой темой также продолжало развиваться направление, связанное с изучением конкуренции в децентрализованной модели цепи поставок. Так, например, Адида Е. и ДеМигель В. [2] занимались вопросами конкуренции с уклоном в исследование влияния дифференциации товаров и потребителей.

Моделирование многоуровневых цепей поставок началось относительно недавно. Одними из первых, кто занялись вопросами менеджмента таких цепочек, были Корбетт Ч. и Кармаркар У. [6], изучившие конкуренцию в многоуровневых цепях с заданным спросом. Позже, Карр С. в соавторстве с Кармаркаром У. [4] опубликовали работу, в которой была исследована модель конкуренции в многоуровневой цепи поставок со сборочной структурой. А одними из последних работ, посвященных теме мульти-эшелонных цепей, являются исследование Чо С.-Х. [5], направленное на изучение горизонтальной кооперации в многоуровневых цепях поставок, и статья Жоу Д., Кармаркара У. и Джанга Б. [11], которая является обобщением работы [4] на случай дистрибутивной структуры цепи поставок и изучает вопросы координации децентрализованной цепи, влияния изменения концентрации участников и вида функции спроса.

Модель цепи поставок, рассматриваемая в рамках этой работы, основана на модели Жоу Д., Кармаркара У. и Джанга Б. [11], которая обобщена нами на случай произвольных издержек фирм.

Глава 1. Теоретико-игровая модель многоуровневой децентрализованной цепи поставок

В этой главе мы будем исследовать задачу координации многоуровневой цепи поставок с древовидной дистрибутивной структурой и линейными функциями спроса в рамках децентрализованной модели.

1.1. Формализация децентрализованной многоуровневой цепи поставок

Для начала опишем процедуру принятия решения в децентрализованной модели многоуровневой цепи поставок с древовидной структурой:

Шаг 1. Корневой узел определяет цену, по которой он продает товар узлам своего сектора.

Шаг 2. Вершины второго уровня цепи поставок, получая информацию от корневого узла, назначают цену товара вершинам своего сектора. Далее процедура повторяется до узлов предпоследнего уровня включительно.

Шаг 3. Концевые вершины на основе цен, полученных от своих поставщиков, и функций спроса определяют объемы выпуска товара на рынок.

Шаг 4. Происходит процедура распределения объемов между фирмами в каждой из вершин конечного уровня.

Шаг 5. Информация об объемах поступает на все верх лежащие уровни и внутри каждого узла происходит процедура распределения объемов между фирмами.

Шаг 6. Подсчет прибыли каждого из участников цепи поставок.

Описанный выше процесс принятия решения характеризует децентрализованную многоуровневую древовидную цепь поставок как конфликтно-управляемую систему с иерархической структурой, т.к. именно такие системы определяются последовательностью уровней управления, следующих друг за другом в порядке установленного приоритета.

Рассмотрим неантагонистическую многошаговую игру Г с иерархической структурой, представляющую собой совокупность $\langle Y, \{U_i\}_{i\in Y}, \{H_i\}_{i\in Y}\rangle$, где $Y = \{1,2,\dots,k\}$ – множество игроков с разбиением на подмножества по приоритету, U_i – множество управляющих воздействий игрока i на подчиненных ему игроков, а H_i – функция выигрыша игрока i, определенная на декартовом произведении множеств U_i управлений игроков $U = \prod_{i\in Y} U_i$. Вектор управлений $u = (u_1, \dots, u_k)$ образует ситуацию в игре Г.

Определение 1.1.1. Ситуация u^* называется ситуацией равновесия но Нэшу в иерархической игре, если для любого игрока $i \in Y$ выполняется

$$H_i(u^*||u_i) \le H_i(u^*), \tag{1.1.1}$$

где за $H_i(u^*||u_i)$ обозначено следующее:

$$H_i(u^*||u_i) = H_i(u_1^*, \dots u_{i-1}^*, u_i, , u_{i+1}^*, \dots u_k^*).$$

В качестве множества игроков Y возьмем упорядоченное множество узлов N цепи поставок, в качестве множеств управляющих воздействий – множества U_{ij} стратегий игроков $x_j^i \in N$. Каждому игроку $x_j^i \in N$ поставим в соответствие вектор $\pi_j^i = \left(\pi_{ij1}, \pi_{ij2}, \dots, \pi_{ijn_{ij}}\right)$. Затем в качестве функций выигрыша игроков $N = \left\{x_1^1, \dots, x_{m_l}^l\right\}$ возьмем соответствующим образом упорядоченный набор из векторов π_j^i: $\pi = \left\{\pi_1^1, \dots, \pi_{m_l}^l\right\}$. Тогда совокупность $\langle N, \left\{U_{ij}\right\}_{i,j:\, x_j^i \in N}, \left\{\pi_j^i\right\}_{i,j:\, x_j^i \in N}\rangle$ представляет собой неантагонистическую многошаговую игру с иерархической структурой, поэтому из определения 1.1.1 и определения 12 следует, что задача координации децентрализованной модели многоуровневой цепи поставок является процессом нахождения равновесия по Нэшу в многоуровневой иерархической игре с полной информацией.

1.2. Решение децентрализованной двухуровневой игры

Начнем рассмотрение задачи координации с частного случая, когда $l = 2$, т.е. в цепи имеется всего 2 уровня, и она представляет собой сектор (см. Рис. 1.2.1).

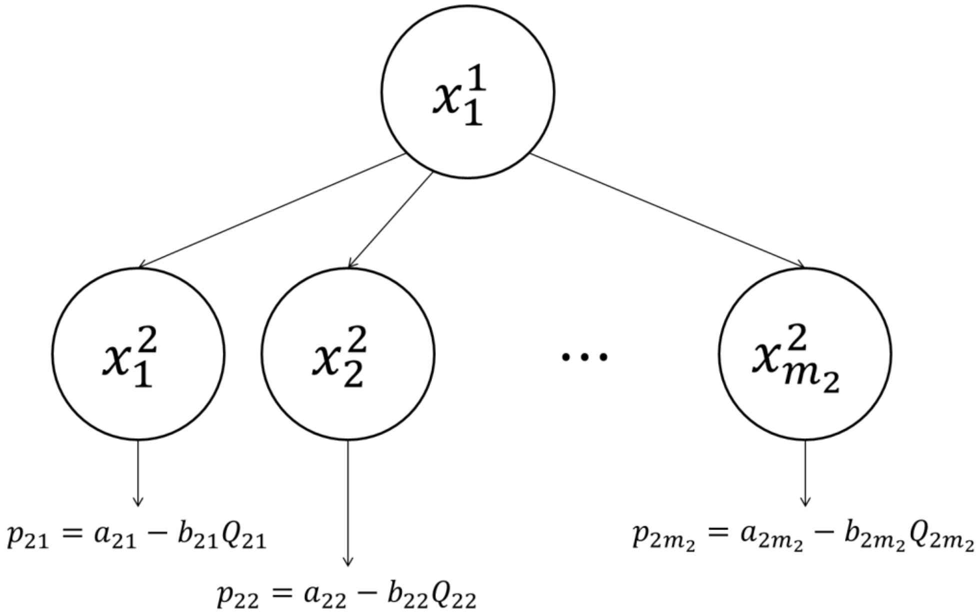


Рис. 1.2.1. Двухуровневая цепь поставок

Рассмотрим фирму k в концевом узле x_j^2, где $1 \le j \le m_2$, $1 \le k \le n_{2j}$. Для неё выражение формулы прибыли имеет вид:

$$\pi_{2jk} = q_{2jk}(p_{2j} - p_{11} - v_{2jk}) \tag{1.2.1}$$

Подставим в эту формулу выражение для p_{2j}, исходя из функции спроса (3), т.е.

$$p_{2j} = a_{2j} - b_{2j}Q_{2j}, \qquad Q_{2j} = \sum_{k=1}^{n_{2j}} q_{2jk}.$$

Получаем следующее выражение:

$$\pi_{2jk} = q_{2jk}\left(a_{2j} - b_{2j}\sum_{h=1}^{n_{2j}} q_{2jh} - p_{11} - v_{2jk}\right) \tag{1.2.2}$$

Для обеспечения выполнения условия (5) применим к функции прибыли (1.2.2) необходимое условие максимума

$$\frac{\partial \pi_{2kj}}{\partial q_{2jk}} = \left(a_{2j} - b_{2j} \sum_{h=1}^{n_{2j}} q_{2jh} - p_{11} - v_{2jk} \right) - \ b_{2j} q_{2jk} = 0,$$

и выразим q_{2jk}:

$$q_{2jk} = \frac{1}{2b_{2j}} \left(a_{2j} - p_{11} - v_{2jk} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{n_{2j}} q_{2jh}. \qquad (1.2.3)$$

Проделаем (1.2.1) – (1.2.3) для всех $k = \overline{1, n_{2j}}$ и получим систему:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_{2j1} \\ q_{2j2} \\ \vdots \\ q_{2jn_{2j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{2j}} \left(a_{2j} - p_{11} - v_{2j1} \right) \\ \frac{1}{b_{2j}} \left(a_{2j} - p_{11} - v_{2j2} \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{2j}} \left(a_{2j} - p_{11} - v_{2jn_{2j}} \right) \end{pmatrix} \qquad (1.2.4)$$

Матрица системы (1.2.4) является невырожденной, в силу линейной независимости строк (столбцов), следовательно, эта система может быть однозначно разрешена относительно всех q_{2jk}.

Найдем обратную матрицу для матрицы системы (1.2.4):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}^{-1}_{[n_{2j} \times n_{2j}]} = \begin{pmatrix} \frac{n_{2j}}{n_{2j}+1} & \frac{-1}{n_{2j}+1} & \cdots & \frac{-1}{n_{2j}+1} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n_{2j}+1} & \frac{-1}{n_{2j}+1} & \dots & \frac{n_{2j}}{n_{2j}+1} \end{pmatrix};$$

и домножим слева обе части (1.2.4) на эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} q_{2j1} \\ q_{2j2} \\ \vdots \\ q_{2jn_{2j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_{2j}}{n_{2j}+1} & \frac{-1}{n_{2j}+1} & \cdots & \frac{-1}{n_{2j}+1} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n_{2j}+1} & \frac{-1}{n_{2j}+1} & \cdots & \frac{n_{2j}}{n_{2j}+1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{2j}} \left(a_{2j} - p_{11} - v_{2j1} \right) \\ \frac{1}{b_{2j}} \left(a_{2j} - p_{11} - v_{2j2} \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{2j}} \left(a_{2j} - p_{11} - v_{2jn_{2j}} \right) \end{pmatrix}. \qquad (1.2.5)$$

Выполнив умножение в равенстве (1.2.5), мы получим следующее выражение для q_{2jk}:

$$q_{2jk} = \frac{1}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\left(a_{2j} - p_{11} - n_{2j}v_{2jk} + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{n_{2j}} v_{2jh})\right), k = \overline{1, n_{2j}}. \qquad (1.2.6)$$

Найденное значение переменных действительно является точкой максимума функций прибыли, т.к.:

$$\frac{\partial^2 \pi_{2jk}}{\partial^2 q_{2jk}} = -b_{2j} - b_{2j} = -2b_{2j} < 0, \text{в силу положительности } b_{2j};$$

$$\frac{\partial^2 \pi_{2jk}}{\partial q_{2jk}\partial q_{2jr}} = 0, \qquad \forall\, r \neq k.$$

Мы можем найти выражение для Q_{2j}:

$$Q_{2j} = \sum_{k=1}^{n_{2j}} q_{2jk} = \sum_{k=1}^{n_{2j}} \frac{1}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\left(a_{2j} - p_{11} - n_{2j}v_{2jk} + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{n_{2j}} v_{2jh}\right) =$$

$$= \frac{n_{2j}(a_{2j} - p_{11}) - \sum_{k=1}^{n_{2j}} v_{2jk}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}, \qquad j = \overline{1, m_2}. \qquad (1.2.7)$$

Рассмотрим теперь корневой сектор. Для фирмы k из корневой вершины 1.1 функция прибыли имеет следующий вид:

$$\pi_{11k} = q_{11k}(p_{11} - v_{11k}), \qquad k = \overline{1, n_{11}}. \qquad (1.2.8)$$

Условие отсутствия излишков и дефицита (2) выражается соотношением

$$Q_{11} = \sum_{k=1}^{n_{11}} q_{11k} = \sum_{j=1}^{m_2} Q_{2j} = \sum_{j=1}^{m_2} \frac{n_{2j}(a_{2j} - p_{11}) - \sum_{h=1}^{n_{2j}} v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)},$$

из которого можно выразить значение p_{11} через переменные q_{11k}:

$$p_{11} = \frac{-\sum_{k=1}^{n_{11}} q_{11k} + \sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}a_{2j} - \sum_{h=1}^{n_{2j}} v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}{\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}. \qquad (1.2.9)$$

Подставим полученное выражение (1.2.9) в формулу прибыли (1.2.8):

$$\pi_{11k} = q_{11k}\left(\frac{-Q_{11}+\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}a_{2j}-\sum_{h=1}^{n_{2j}}v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}{\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}-v_{11k}\right), \qquad k=\overline{1,n_{11}}, \quad (1.2.10)$$

а затем применим необходимое условие максимума к выражению для функций прибыли (1.2.10):

$$\frac{\partial\pi_{11k}}{\partial q_{11k}} = \left(\frac{-Q_{11}+\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}a_{2j}-\sum_{h=1}^{n_{2j}}v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}{\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}-v_{11k}\right)-\frac{q_{11k}}{\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}=0,$$

$$k=\overline{1,n_{11}}.$$

Оставляя переменные q_{11k} в левой части и перенося остальные параметры в правую, получим систему (1.2.11):

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & & 1\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{111}\\ q_{112}\\ \vdots\\ q_{11n_{11}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}a_{2j}-\sum_{h=1}^{n_{2j}}v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)-v_{111}\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)\\ \sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}a_{2j}-\sum_{h=1}^{n_{2j}}v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)-v_{112}\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}a_{2j}-\sum_{h=1}^{n_{2j}}v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)-v_{11n_{11}}\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)\end{pmatrix}. \quad (1.2.11)$$

Матрица $\begin{pmatrix}2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & & 1\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2\end{pmatrix}_{[n_{11}\times n_{11}]}$ системы (1.2.11) является невырожденной матрицей, т.к. её строки (столбцы) линейно независимы. Поэтому мы можем однозначно выразить значения переменных q_{11k}, домножив эту систему на обратную матрицу, которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{n_{11}}{n_{11}+1} & \frac{-1}{n_{11}+1} & \cdots & \frac{-1}{n_{11}+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n_{11}+1} & \frac{-1}{n_{11}+1} & \cdots & \frac{n_{11}}{n_{11}+1} \end{pmatrix}.$$

Получаем выражения для $q_{11j}\ j = \overline{1, n_{11}}$:

$$\begin{pmatrix} q_{111} \\ q_{112} \\ \vdots \\ q_{11n_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_{11}}{n_{11}+1} & \frac{-1}{n_{11}+1} & \cdots & \frac{-1}{n_{11}+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n_{11}+1} & \frac{-1}{n_{11}+1} & \cdots & \frac{n_{11}}{n_{11}+1} \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}a_{2j} - \sum_{h=1}^{n_{2j}} v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right) - v_{111} \sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right) \\ \sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}a_{2j} - \sum_{h=1}^{n_{2j}} v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right) - v_{112} \sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}a_{2j} - \sum_{h=1}^{n_{2j}} v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right) - v_{11n_{11}} \sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right) \end{pmatrix}. \tag{1.2.12}$$

После упрощения (1.2.12) мы приходим к равенствам (1.2.13):

$$q_{11k} = \frac{1}{(n_{11}+1)} \sum_{j=1}^{m_2} \frac{1}{b_{2j}} \left(n_{2j}a_{2j} - \sum_{h=1}^{n_{2j}} v_{2jh} - n_{11}v_{11k} + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{n_{11}} v_{11r} \right), \tag{1.2.13}$$

$$k = \overline{1, n_{11}}\,.$$

Найденные значения (1.2.13) действительно являются точками максимума, т.к.

$$\frac{\partial^2 \pi_{11k}}{\partial^2 q_{11k}} = \frac{-1}{\sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right)} + \frac{-1}{\sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right)} = \frac{-2}{\sum_{j=1}^{m_2} \left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right)} < 0,$$

в силу того, что $\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)} \right) > 0,\ \forall\, j = \overline{1, m_2}$;

$$\frac{\partial^2 \pi_{11k}}{\partial q_{11k} q_{11r}} = 0, \qquad \forall\, r \neq k.$$

В формуле (1.2.13) все параметры известны, т.к. являются заданными параметрами цепи поставок. Следовательно, значения переменных q_{11k} также известны. Поэтому далее мы можем последовательно найти значения переменных p_{11}, Q_{11}, q_{2jk}, $j=\overline{1,m_2}$, $k=\overline{1,n_{2j}}$ и p_{2j}, $j=\overline{1,m_2}$. Таким образом, оптимальный поток для двухуровневой децентрализованной цепи поставок найден, и задача координации решена.

Аналитические выражения равновесных значений переменных приведены в табл. 1.3.1.

Таблица 1.3.1. Аналитические выражения для равновесных значений переменных

Переменная	***Выражение***
$\boldsymbol{q_{11k}}$, $\boldsymbol{k=\overline{1,n_{11}}}$	$\frac{1}{(n_{11}+1)}\sum_{j=1}^{m_2}\frac{1}{b_{2j}}\left(n_{2j}a_{2j}-\sum_{h=1}^{n_{2j}}v_{2jh}-n_{11}v_{11k}+\sum_{\substack{r=1\\r\neq k}}^{n_{11}}v_{11r}\right)$
$\boldsymbol{Q_{11}}$	$\frac{1}{(n_{11}+1)}\sum_{j=1}^{m_2}\frac{1}{b_{2j}}\left(n_{11}n_{2j}a_{2j}-n_{11}\sum_{h=1}^{n_{2j}}v_{2ih}-\sum_{r=1}^{n_{11}}v_{11r}\right)$
$\boldsymbol{p_{11}}$	$\frac{-\sum_{k=1}^{n_{11}}q_{11k}+\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}a_{2j}-\sum_{h=1}^{n_{2j}}v_{2jh}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}{\sum_{j=1}^{m_2}\left(\frac{n_{2j}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\right)}$
$\boldsymbol{q_{2jk}}$, $\boldsymbol{j=\overline{1,m_2},k=\overline{1,n_{2j}}}$	$\frac{1}{b_{2j}(n_{2j}+1)}\left(a_{2j}-p_{11}-n_{2j}v_{2jk}+\sum_{\substack{h=1\\h\neq k}}^{n_{2j}}v_{2jh})\right)$
$\boldsymbol{Q_{2j}}$, $\boldsymbol{j=\overline{1,m_2}}$	$\frac{n_{2j}(a_{2j}-p_{11})-\sum_{k=1}^{n_{2j}}v_{2jk}}{b_{2j}(n_{2j}+1)}$

1.3. Равновесие по Нэшу в многоуровневой децентрализованной игре

Пусть задана децентрализованная древовидная цепь поставок с произвольным количеством уровней. Аналогично предыдущему параграфу решение задачи координации начнем с рассмотрения концевых узлов, переходя далее в направлении корневой вершины.

Рассмотрим функцию прибыли фирмы k из узла x_j^l:

$$\pi_{ljk} = q_{ljk}\left(p_{lj} - p_{it} - v_{ljk}\right), \qquad p_{it}: (l, j) \in S_t^i. \tag{1.3.1}$$

Подставим в формулу прибыли (1.3.1) выражение для переменной p_{lj}, используя функцию спроса (3):

$$\pi_{ljk} = q_{ljk}\left(a_{lj} - b_{lj}Q_{lj} - p_{it} - v_{ljk}\right). \tag{1.3.2}$$

Проделав (1.3.1) – (1.3.2) для всех $k = \overline{1, n_{ll}}$ и применив необходимое условие максимума (1.3.3):

$$\frac{\partial \pi_{ljk}}{\partial q_{ljk}} = 0, \qquad k = \overline{1, n_{lj}}, \tag{1.3.3}$$

мы придем к системе (1.3.4):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_{lj1} \\ q_{lj2} \\ \vdots \\ q_{ljn_{lj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{lj1}\right) \\ \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{lj2}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{ljn_{lj}}\right) \end{pmatrix}. \tag{1.3.4}$$

Система (1.3.4) имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}_{[n_{lj} \times n_{lj}]}$, которая является невырожденной в силу линейной независимости строк (столбцов), поэтому систему (1.3.4) можно однозначным образом разрешить относительно переменных $q_{ljk}, k = \overline{1, n_{lj}}$, и единственное решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} q_{lj1} \\ q_{lj2} \\ \vdots \\ q_{ljn_{lj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_{lj}}{n_{lj}+1} & \frac{-1}{n_{lj}+1} & \cdots & \frac{-1}{n_{lj}+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n_{lj}+1} & \frac{-1}{n_{lj}+1} & \cdots & \frac{n_{lj}}{n_{lj}+1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{lj1}\right) \\ \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{lj2}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{ljn_{lj}}\right) \end{pmatrix},$$

или после перемножения решение имеет вид (1.3.5):

$$\begin{pmatrix} q_{lj1} \\ q_{lj2} \\ \vdots \\ q_{ljn_{lj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{lj1} - \sum_{h=2}^{n_{lj}} v_{ljh}\right)\right) \\ \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{lj2} - \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq 2}}^{n_{lj}} v_{ljh}\right)\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{ljn_{lj}} - \sum_{h=1}^{n_{lj}-1} v_{ljh}\right)\right) \end{pmatrix}. \qquad (1.3.5)$$

Для узла x_j^lтакже имеет место равенство (1.3.6)

$$Q_{lj} = \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk} = \frac{n_{lj}(a_{lj} - p_{it}) - \sum_{k=1}^{n_{lj}} v_{ljk}}{b_{lj}\left(n_{lj}+1\right)}. \qquad (1.3.6)$$

Аналогично проделываем процедуры (1.3.1) – (1.3.6) для всех концевых вершин $x_j^l \in X_l$.

Теперь рассмотрим фирму k из x_j^{l-1}. Для неё функция прибыли имеет вид:

$$\pi_{(l-1)jk} = q_{(l-1)jk}\left(p_{(l-1)j} - p_{it} - v_{(l-1)jk}\right), \qquad k = \overline{1, n_{(l-1)j}},$$
$$\text{где } p_{it}: (l-1, j) \in S_t^i. \qquad (1.3.7)$$

В виду того, что узел $x_{(l-1)j}$ образует сектор, то из условия отсутствия излишков и дефицита (2) имеем соотношение

$$\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} = Q_{(l-1)j} = \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} Q_{lh} =$$

$$= \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}\left(a_{lh} - p_{(l-1)j}\right) - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}}{b_{lh}(n_{lh}+1)},$$

из которого можно однозначно выразить переменную $p_{(l-1)j}$:

$$p_{(l-1)j} = f_{(l-1)j}\left(q_{(l-1)j1}, \dots, q_{(l-1)jn_{(l-1)j}}\right) =$$

$$= \frac{-\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} + \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}a_{lh} - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}}{b_{lh}(n_{lh}+1)}}{\sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}}{b_{lh}(n_{lh}+1)}}. \qquad (1.3.8)$$

Подставим (1.3.8) в формулы прибыли (1.3.7)

$$\pi_{(l-1)jk} = q_{(l-1)jk}\left(f_{(l-1)j} - p_{it} - v_{(l-1)jk}\right), \qquad k = \overline{1, n_{(l-1)j}}, \qquad (1.3.9)$$

и применим необходимое условие максимума к выражениям (1.3.9):

$$\frac{\partial \pi_{(l-1)jk}}{\partial q_{(l-1)jk}} = \left(f_{(l-1)j} - p_{it} - v_{(l-1)jk}\right) +$$

$$+q_{(l-1)jk} \frac{-1}{\sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}}{b_{lh}(n_{lh}+1)}} = 0, \qquad k = \overline{1, n_{(l-1)j}}.$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_{(l-1)j1} \\ q_{(l-1)j2} \\ \vdots \\ q_{(l-1)jn_{(l-1)j}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)}\left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - n_{lh}v_{(l-1)j1} - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}\right) \\ \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)}\left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - n_{lh}v_{(l-1)j2} - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}\right) \\ \vdots \\ \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)}\left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - n_{lh}v_{(l-1)jn_{(l-1)j}} - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}\right) \end{pmatrix}. \qquad (1.3.10)$$

К матрице системы (1.3.10) – $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}_{[n_{(l-1)i} \times n_{(l-1)i}]}$ (т.к. она является невырожденной в силу линейной независимости строк (столбцов)) – существует обратная матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}^{-1}_{[n_{(l-1)j} \times n_{(l-1)j}]} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{n_{(l-1)j}}{n_{(l-1)j}+1} & \frac{-1}{n_{(l-1)j}+1} & \cdots & \frac{-1}{n_{(l-1)j}+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n_{(l-1)j}+1} & \frac{-1}{n_{(l-1)j}+1} & \cdots & \frac{n_{(l-1)j}}{n_{(l-1)j}+1} \end{pmatrix}_{[n_{(l-1)j} \times n_{(l-1)j}]} .$$

Вследствие этого, (1.3.10) однозначно разрешима относительно переменных $q_{(l-1)jk}$, $k = \overline{1, n_{(l-1)j}}$:

$$q_{(l-1)jk} = \frac{1}{n_{(l-1)j}+1} \left[\sum_{h:(l.h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)} \left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -n_{(l-1)j}n_{lh}v_{(l-1)jk} + n_{lh} \sum_{\substack{e=1 \\ e\neq k}}^{n_{(l-1)j}} v_{(l-1)je} \right) \right], k = \overline{1, n_{(l-1)j}}.$$

Далее может быть посчитано значение $Q_{(l-1)j}$:

$$Q_{(l-1)j} = \sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} = \frac{1}{n_{(l-1)j}+1} \left[\sum_{h:(l.h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)} * \right.$$

$$\left. * \left(n_{(l-1)j} \left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - \sum\nolimits_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr} \right) - n_{lh} \sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} v_{(l-1)jk} \right) \right]. \quad (1.3.11)$$

Повторяем процесс (1.3.7) – (1.3.11) для всех оставшихся узлов x_i^{l-1} этого уровня: $x_i^{l-1} \in X_{l-1}, i \neq j$.

Далее мы аналогичным образом рассматриваем вершины x_t^i из множеств X_i вершин уровня i, $i = (l-2),(l-3),\dots,2$, решаем двухуровневую подыгру в каждом из секторов, образованных этими узлами, получая при этом решение, зависящее от цены поставщика узла x_t^i, и выражаем значение этой цены через переменные объема выпуска.

Переходим к рассмотрению множества вершин первого уровня $X_1 = \{x_1^1\}$. Вид функции прибыли для произвольной фирмы k из узла x_{11} имеет вид (1.3.12):

$$\pi_{11k} = q_{11k}(p_{11} - v_{11k}). \qquad (1.3.12)$$

Учтем, что переменная p_{11} имеет выражение через переменные $q_{11k}, k = \overline{1, n_{11}}$ и параметры затрат на производство, которое может быть получено после рассмотрения всех X_i $i = \overline{2, l-1}$ из условия отсутствия дефицита и излишков:

$$\begin{gathered} p_{11} = f_{11}\left(q_{111},\dots,q_{11n_{11}}, v_{it1},\dots,v_{itn_{it}},\dots,v_{111},\dots,v_{11n_{11}}\right), \\ i,t\colon (i,t) \in S_1^1, \end{gathered} \qquad (1.3.13)$$

где f_{11} линейная функция по аргументам $q_{111},\dots,q_{11n_{11}}$.

Подставим выражение (1.3.13) в формулу прибыли (1.3.12)

$$\pi_{11j} = q_{11k}\left(f_{11}\left(q_{111},\dots,q_{11n_{11}}, v_{it1},\dots,v_{itn_{it}},\dots,v_{11n_{11}}\right) - v_{11k}\right), \qquad (1.3.14)$$

и применим к (1.3.14) необходимое условие максимума:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \pi_{11k}}{\partial q_{11k}} = f_{11}\left(q_{111},\dots,q_{11n_{11}}, v_{it1},\dots,v_{itn_{it}},\dots,v_{111},\dots,v_{11n_{11}}\right) - \\ -v_{11k} + q_{11k}\frac{\partial f_{11}}{\partial q_{11k}} = 0, \qquad k = \overline{1, n_{11}}, \end{gathered} \qquad (1.3.15)$$

при этом значения всех производных $\frac{\partial f_{11}}{\partial q_{11k}}, k = \overline{1, n_{11}}$ являются константами в силу линейности функции f_{11}. Система (1.3.15) является системой линейных уравнений относительно $q_{111},\dots,q_{11n_{11}}$ с невырожденной матрицей (1.3.16)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}_{[n_{11}\times n_{11}]} , \qquad (1.3.16)$$

и вследствие этого она является однозначно разрешимой относительно всех $q_{11k}, k = \overline{1, n_{11}}$, причем это решение зависит только от заданных параметров цепи поставок. Далее последовательно подставляя полученные значения в выражения для неизвестных переменных, мы найдем их равновесные значения. Таким образом, оптимальный поток d^* найден, и задача координации децентрализованной модели многоуровневых цепей поставок является решенной.

Глава 2. Модели координации централизованной многоуровневой цепи поставок

В этой главе мы исследуем задачу координации цепи поставок в случае централизованной модели, т.е. все участники цепи действуют централизованно, имея цель максимизировать заданную целевую функцию при известных линейных функциях спроса в конечных узлах.

2.1. Формализация первой модели координации централизованной многоуровневой цепи поставок

Пусть задана централизованная многоуровневая цепь поставок с древовидной дистрибутивной структурой. Для каждой фирмы этой цепи выпишем её функцию прибыли $\pi_{ijk}(d)$, а затем просуммируем их по $i = \overline{1,l}$, $j = \overline{1,m_\iota}, k = \overline{1,n_{\iota\jmath}}$ для того, чтобы получить общую прибыль цепи поставок $\Pi(d)$. Нам необходимо найти допустимый поток $\hat{d}$, обеспечивающий выполнение соотношения (6), которое приводит нас к оптимизационной задаче (2.1.1) при условиях (2.1.2) – (2.1.5):

$$\max_{d\in D} \Pi(d) =$$

$$= \max_{q_{ijh}, p_{ij}} \left(\sum_{i=2}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \pi_{ijk} \left(q_{ij1}, \dots, q_{ijn_{ij}}, v_{ij1}, \dots, v_{ijn_{ij}}, p_{ij}, p_{th} \right) + \right. \qquad (2.1.1)$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n_{11}} \pi_{11k} \left(q_{111}, \dots, q_{11n_{11}}, v_{111}, \dots, v_{11n_{11}}, p_{11} \right) \right),$$

$$p_{th}: (i,j) \in S_h^t;$$

$$p_{lj} = a_{lj} - b_{lj} \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk}, \qquad j = \overline{1,m_l}; \qquad (2.1.2)$$

$$\sum_{r=1}^{n_{th}} q_{thr} = \sum_{i,j:(i,j)\in S_h^t} \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}\,, \quad t,h\colon x_h^t \notin X_l; \tag{2.1.3}$$

$$q_{ijk} \geq 0, \qquad i = \overline{1,l}, \qquad j = \overline{1,m_\iota}, \qquad k = \overline{1,n_{\iota j}}; \tag{2.1.4}$$

$$p_{ij} \geq 0, \qquad i = \overline{1,l}, \qquad j = \overline{1,m_\iota}. \tag{2.1.5}$$

Из свойств максимизируемой функции $\Pi(d)$ и вида ограничений (2.1.2) – (2.1.5) мы заключаем, что (2.1.1) – (2.1.5) – это есть задача нелинейной оптимизации при линейных ограничениях типа равенств и неравенств.

Для решения рассматриваемой задачи оптимизации была написана программа в среде MATLAB, реализующая итеративный алгоритм поиска точки максимума при ограничениях в виде равенств и неравенств на основе метода последовательного квадратичного программирования. Код программы приведен в Приложении 1.

2.2. Теоретический анализ нелинейной задачи оптимизации

В этом параграфе мы исследуем существование решения задачи координации централизованной цепи поставок, которая свелась к задаче максимизации нелинейной функции следующего вида:

$$\Pi(d) = \sum_{i=2}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \pi_{ijk} \left(q_{ij1}, \dots, q_{ijn_{ij}}, v_{ij1}, \dots, v_{ijn_{ij}}, p_{ij}, p_{th}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{n_{11}} \pi_{11k}\left(q_{111}, \dots, q_{11n_{11}}, v_{111}, \dots, v_{11n_{11}}, p_{11}\right), \qquad p_{th}\colon (i,j) \in S_h^t. \tag{2.2.1}$$

Распишем подробнее:

$$\Pi(d) = \sum_{i=2}^{l-1} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(q_{ijk}\left(p_{ij} - p_{th} - v_{ijk}\right)\right) + \\ + \sum_{j=1}^{m_l} \sum_{k=1}^{n_{lj}} \left(q_{ljk}\left(a_{lj} - b_{lj} \sum_{r=1}^{n_{lj}} q_{ljr} - p_{zu} - v_{ljk}\right)\right) + \\ + \sum_{k=1}^{n_{11}} q_{11k}\left(p_{11} - v_{11k}\right), \qquad p_{th}\colon (i,j) \in S_h^t, \qquad p_{zu}\colon (l,j) \in S_u^z. \tag{2.2.2}$$

Ввиду отсутствия в цепи излишков и дефицита в выражении (2.2.2) слагаемые вида (2.2.3)

$$-p_{th} \sum_{i,j:(i,j)\in S_h^t} \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk} \tag{2.2.3}$$

взаимно уничтожатся слагаемыми вида (2.2.4)

$$p_{th} \sum_{k=1}^{n_{th}} q_{thk}, \tag{2.2.4}$$

тем самым мы получаем, что функция $\Pi(d)$ не зависит от переменных p_{ij} для $\forall\, i = \overline{1, l-1}$ и $\forall\, j = \overline{1, m_\iota}$, т.е. (2.2.2) можно переписать в виде (2.2.5):

$$\Pi(d) = \sum_{i=2}^{l-1} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(-q_{ijk} v_{ijk}\right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m_l} \sum_{k=1}^{n_{lj}} \left(q_{ljk} \left(a_{lj} - b_{lj} \sum_{r=1}^{n_{lj}} q_{ljr} - v_{ljk} \right) \right) + \sum_{k=1}^{n_{11}} (-q_{11k} v_{11k}). \tag{2.2.5}$$

Из формулы (2.2.5) следует, что максимизируемая функция зависит только от переменных q_{ijk}, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, m_\iota}$, $k = \overline{1, n_{\iota J}}$, причем она является непрерывной функцией по этим переменным, следовательно, по теореме Вейерштрасса для доказательства существования решения задачи максимизации необходимо и достаточно показать ограниченность и замкнутость множества, на котором задана функция $\Pi(d)$. Для этого перейдем к изучению ограничений, при которых рассматривается задача оптимизации, т.е.:

$$p_{lj} = a_{lj} - b_{lj} \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk}\,, \qquad j = \overline{1, m_l}; \tag{2.2.6}$$

$$\sum_{r=1}^{n_{th}} q_{thr} = \sum_{i,j:(i,j) \in S_h^t} \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}\,, \quad t, h\colon x_h^t \notin X_l; \tag{2.2.7}$$

$$q_{ijk} \geq 0, \qquad i = \overline{1, l}, \qquad j = \overline{1, m_\iota}, \qquad k = \overline{1, n_{\iota J}}; \tag{2.2.8}$$

$$p_{ij} \geq 0, \qquad i = \overline{1, l}, \qquad j = \overline{1, m_\iota}. \tag{2.2.9}$$

Рассмотрим поднабор ограничений (2.2.6) и (2.2.8) – (2.2.9) при $i = l$. Из него вытекает логическая цепочка (2.2.10)

$$\left.\begin{array}{r} p_{lj} = a_{lj} - b_{lj} \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk} \\ p_{lj} \geq 0 \\ q_{ljk} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a_{lj} - b_{lj} \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk} \geq 0 \\ q_{ljk} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk} \leq \frac{a_{lj}}{b_{lj}} \Rightarrow 0 \leq q_{ljk} \leq \frac{a_{lj}}{b_{lj}}, \tag{2.2.10}$$

из которой мы заключаем, что переменные q_{ljk}, $j = \overline{1, m_l}$, $k = \overline{1, n_{lj}}$ ограничены и сверху, и снизу. Тогда из условия (2.2.7) – условия отсутствия дефицита и излишков – следует, что все переменные q_{ijk} $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, m_\iota}$, $k = \overline{1, n_{\iota j}}$ ограничены:

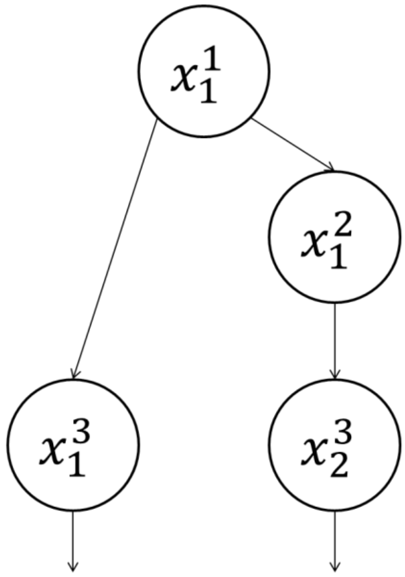
$$0 \leq q_{ijk} \leq const, \qquad i = \overline{1, l}, \qquad j = \overline{1, m_\iota}, \qquad k = \overline{1, n_{\iota j}}. \tag{2.2.11}$$

Таким образом, область определения функции является ограниченной, а в виду того, что все неравенства в (2.2.10) и (2.2.11) – нестрогие, то еще и замкнутой, следовательно, по теореме Вейерштрасса функция $\Pi(d)$ ограничена и достигает своего максимума как непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве.

2.3. Сравнение решений в централизованной и децентрализованной моделях многоуровневых цепей поставок на основе численного моделирования

Рассмотрим конкретный пример цепи поставок и сравним решения, получаемые для децентрализованной и централизованной моделей.

Пусть имеется цепь поставок, изображенная на Рис. 2.3.1.



$$p_{31} = 5000 - 0{,}25Q_{31} \quad p_{32} = 6000 - 0{,}09Q_{32}$$

Рис. 2.3.1. Цепь поставок

Значения параметров цепи поставок приведены в таблице 2.3.1.

Таблица 2.3.1. Значения параметров цепи поставок

	Узел x_1^1	Узел x_1^2	Узел x_1^3	Узел x_2^3
Количество фирм в узле, n_{ij}	$n_{11} = 2$	$n_{21} = 1$	$n_{31} = 4$	$n_{32} = 2$
Значение затрат на производство единицы товара, v_{ijh}	$v_{111} = 1500$ $v_{112} = 1505$	$v_{211} = 700$	$v_{311} = 342$ $v_{312} = 340$ $v_{313} = 338$ $v_{314} = 345$	$v_{321} = 120$ $v_{322} = 122$

Функции прибыли для всех фирм из узлов уровня 3 имеют вид (2.3.1) и (2.3.2):

$$\begin{aligned}
\pi_{311} &= q_{311}\left(5000 - 0{,}25\sum_{j=1}^{4} q_{31j} - p_{11} - 342\right),\\
\pi_{312} &= q_{312}\left(5000 - 0{,}25\sum_{j=1}^{4} q_{31j} - p_{11} - 340\right),\\
\pi_{313} &= q_{313}\left(5000 - 0{,}25\sum_{j=1}^{4} q_{31j} - p_{11} - 338\right),\\
\pi_{314} &= q_{314}\left(5000 - 0{,}25\sum_{j=1}^{4} q_{31j} - p_{11} - 345\right);
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{321} &= q_{321}\left(6000 - 0{,}09\sum_{j=1}^{2} q_{32j} - p_{21} - 120\right),\\
\pi_{322} &= q_{322}\left(6000 - 0{,}09\sum_{j=1}^{2} q_{32j} - p_{21} - 122\right).
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Применяем ко всем функциям в (2.3.1) и (2.3.2) необходимое условие максимума и получаем соответственно две системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{311}\\ q_{312}\\ q_{313}\\ q_{314}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4658 - p_{11}\\ 4660 - p_{11}\\ 4662 - p_{11}\\ 4655 - p_{11}\end{pmatrix}. \tag{2.3.3}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}09\\ 0{,}09 & 0{,}18\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{321}\\ q_{322}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5880 - p_{21}\\ 5878 - p_{21}\end{pmatrix}; \tag{2.3.4}$$

После решения систем (2.3.3) и (2.3.4) мы имеем выражения для q_{3ij}:

$$\begin{cases} q_{311} = 3724 - 0{,}8p_{11},\\ q_{312} = 3732 - 0{,}8p_{11},\\ q_{313} = 3740 - 0{,}8p_{11},\\ q_{314} = 3712 - 0{,}8p_{11}. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

$$\begin{cases} q_{321} = \frac{1}{27}(588200 - 100p_{21}), \\ q_{322} = \frac{1}{27}(587600 - 100p_{21}). \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Из условия отсутствия дефицита и излишков получаем соотношение

$$Q_{32} = q_{321} + q_{322} = \frac{1175800}{27} - \frac{200}{27}p_{21} = Q_{21} = q_{211},$$

из которого можно выразить значение переменной p_{21}

$$p_{21} = 5879 - 0{,}135q_{211}. \quad (2.3.7)$$

Для единственной фирмы из узла x_1^2 функция прибыли записывается в виде соотношения:

$$\pi_{211} = q_{211}(p_{21} - p_{11} - 700),$$

подставляя в которое выражение (2.3.7), получаем:

$$\pi_{211} = q_{211}(5879 - 0{,}135q_{211} - p_{11} - 700).$$

Применение необходимого условия максимума к этому уравнению дает равенство (2.3.8):

$$\frac{\partial \pi_{211}}{\partial q_{211}} = 0 \Rightarrow q_{211} = \frac{517900}{27} - \frac{100}{27}p_{11}. \quad (2.3.8)$$

Условие отсутствия излишков и дефицита в секторе корневой вершины может быть записано в виде соотношения

$$Q_{11} = q_{111} + q_{112} = Q_{21} + Q_{31} = q_{211} + \sum_{i=1}^{4} q_{31i},$$

из которого, подставив (2.3.5) и (2.3.8), можно выразить p_{11}:

$$p_{11} = \frac{1150520}{233} - \frac{135}{932}(q_{111} + q_{112}) \quad (2.3.9)$$

Фирмы 1 и 2 из корневого сектора имеют функции прибыли (2.3.10) и (2.3.11) соответственно:

$$\pi_{111} = q_{111}(p_{11} - 1500), \quad (2.3.10)$$

$$\pi_{112} = q_{112}(p_{11} - 1505), \quad (2.3.11)$$

которые после подстановки в них (2.3.9) примут вид (2.3.12) и (2.3.13).

$$\pi_{111} = q_{111}\left(\frac{1150520}{233} - \frac{135}{932}(q_{111} + q_{112}) - 1500\right), \qquad (2.3.12)$$

$$\pi_{112} = q_{112}\left(\frac{1150520}{233} - \frac{135}{932}(q_{111} + q_{112}) - 1505\right). \qquad (2.3.13)$$

После применения необходимого условия максимума к (2.3.12) и (2.3.13) получим систему:

$$\begin{pmatrix} \frac{135}{932} & \frac{135}{466} \\ \frac{135}{466} & \frac{135}{932} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{111} \\ q_{112} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{801020}{233} \\ \frac{799855}{233} \end{pmatrix},$$

единственное решение которой имеет вид (2.3.14)

$$\begin{cases} q_{111} = \frac{213916}{27} \approx 7923, \\ q_{112} = \frac{212984}{27} \approx 7889. \end{cases} \qquad (2.3.14)$$

Подставляем найденные значения (2.3.14) в выражения (2.3.9.)

$$p_{11} = \frac{616895}{233} \approx 2648. \qquad (2.3.15)$$

Значение (2.3.15) подставляем в (2.3.5) и (2.3.8), получаем следующее:

$$\begin{aligned} q_{311} &= \frac{374176}{233} \approx 1606\,, \\ q_{312} &= \frac{376040}{233} \approx 1614, \\ q_{313} &= \frac{377904}{233} \approx 1622, \\ q_{314} &= \frac{371380}{233} \approx 1594; \end{aligned} \qquad (2.3.16)$$

$$q_{211} = \frac{19660400}{2097} \approx 9375; \qquad (2.3.17)$$

Далее, подставляя (2.3.17) в формулу (2.3.7), получаем значение для p_{21}:

$$p_{21} = \frac{1074901}{233} \approx 4613. \quad (2.3.18)$$

Используя (2.3.18), находим q_{321} и q_{322} из выражения (2.3.6):

$$q_{321} = \frac{3284500}{699} \approx 4699;$$
$$q_{322} = \frac{9806900}{2097} \approx 4677. \quad (2.3.19)$$

И, наконец, используя вычисленные значения объемов выпуска (2.3.16) и (2.3.19) в конечных узлах x_1^3 и x_2^3, вычисляем значение оптимальных цен p_{31} и p_{32}, используя функции спроса:

$$p_{31} = \frac{790125}{233} \approx 3391,$$
$$p_{32} = \frac{1201396}{233} \approx 5156.$$

Зная равновесные значения всех переменных, мы можем вычислить прибыль каждого участника, а затем получить общую прибыль цепи поставок, которая получается равной:

$$\Pi^d = \frac{53525765475416}{1465803} \approx 3.6516 * 10^7. \quad (2.3.20)$$

Теперь найдем оптимальные значения, решив задачу максимизации общей прибыли в случае централизованной модели цепи поставок с помощью программы в пакете MATLAB. После выполнения итеративного алгоритма программа выдает следующие значения:

$$q_{111} \approx 27566,$$
$$q_{112} \approx 0, \quad (2.3.21)$$
$$p_{11} \approx 1553;$$

$$q_{211} \approx 21242,$$
$$p_{21} \approx 0; \quad (2.3.22)$$

$$q_{311} \approx 0,$$

$$q_{312} \approx 0,$$

$$q_{313} \approx 6324, \qquad (2.3.23)$$

$$q_{314} \approx 0,$$

$$p_{31} \approx 3419;$$

$$q_{321} \approx 21242,$$

$$q_{322} \approx 0, \qquad (2.3.24)$$

$$p_{32} \approx 4088.$$

Общая прибыль всей цепи поставок при данных значениях переменных равна

$$\Pi^c \approx 4.7559 * 10^7\ . \qquad (2.3.25)$$

Сравнивая значения суммарной прибыли цепи в случае децентрализованной (2.3.20) и централизованной (2.3.25) моделей, заметим, что в случае централизованного поведения участников произошло увеличение общей прибыли цепи на $1.1042*10^7$ или примерно на 30%.

Ряд аналогичных числовых экспериментов выявил, что централизация цепи дает в среднем 25-типроцентный выигрыш в общей прибыли по сравнению с децентрализованной моделью.

2.4. Формализация модели координации централизованной многоуровневой цепи поставок на основе арбитражного решения Нэша

Оптимизационная задача (2.1.1) (и как следствие результаты, получаемые после её решения) имеет лишь один, но существенный недостаток: она требует после себя дополнительной системы дележей, т.к. при получаемых оптимальных объемах, которые действительно максимизируют прибыль всей цепи поставок, прибыль некоторых отдельных участников является нулевой или даже отрицательной. Поэтому после определения потока, удовлетворяющего (2.1.1) – (2.1.5), в цепь необходимо дополнительно ввести систему контрактов между всеми участниками, которая оговаривает дележ получаемой общей прибыли. Однако зачастую сделать это в реальных условиях очень трудно.

Исследуем метод, использующий альтернативную формулировку оптимизационной задачи, не требующий после себя применения еще какого-либо математического аппарата.

Пусть у нас имеется игра в нормальной форме, т.е. совокупность $\Gamma = \langle N, \{Y_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}\rangle$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – непустое множество игроков, Y_i – множество стратегий игрока i, а H_i – функция выигрыша игрока i, определенная на декартовом произведении множеств $\{Y_i\}_{i\in N}$ стратегий игроков $Y = \prod_{i\in N} Y_i$, $H_i: Y \to R$ [1].

Определение 2.4.1. Арбитражным решением Нэша будем называть такой вектор $y' = (y_1', \ y_2', \ \dots, y_n') \in Y$, для которого выполняется:

$$\arg\max_{y_1, y_2, \dots, y_n} \prod_{i=1}^{n} (H_i(y_1, y_2, \dots, y_n) - \theta_i) = y'. \tag{2.4.1}$$

где $\theta_i, i = \overline{1, n}$ – известные числа (обычно за θ_i берут значение в некотором смысле «гарантированного» выигрыша игрока i).

В основе арбитражного решения Нэша лежит принцип, что все игроки между собой равнозначны, однако очень часто бывает так, что значимость некоторых игроков выше, чем других. В связи с этим введем понятие взвешенного решения Нэша, которое учитывает «вес» каждого из игроков.

Определение 2.4.2. Взвешенным арбитражным решением Нэша для игры Г с весовыми коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \colon \alpha_i > 0 \ \ \forall i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ будем называть такой вектор $y' = (y_1', \ y_2', \ \dots, y_n') \in Y$, что выполняется:

$$\arg\max_{y_1, y_2, \dots, y_n} \prod_{i=1}^{n} (H_i(y_1, y_2, \dots, y_n) - \theta_i)^{\alpha_i} = y'. \tag{2.4.2}$$

Упорядочим все узлы цепи поставок: $N = \{x_1^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m_l}^l\}$. Множество N будем считать множеством игроков, а множества U_{ij}, определяемые по формуле (4) – множествами стратегий игроков $x_j^i \in N$. Каждому игроку $x_j^i \in N$ поставим в соответствие вектор $\pi_j^i = \left(\pi_{ij1}, \pi_{ij2}, \dots, \pi_{ijn_{ij}}\right)$ и в качестве функций выигрыша игроков возьмем набор из этих векторов, упорядоченный соответственно упорядочению множества игроков: $\pi = \{\pi_1^1, \dots, \pi_{m_l}^l\}$. За точку θ возьмем точку «статус кво» из определения 13. Тогда из определения 2.4.2 следует, что решение задачи координации централизованной цепи поставок (7) является взвешенным решением Нэша.

В терминах принятых нами обозначений решением будет являться такой допустимый поток d^N, на котором достигается максимум функции (2.4.3):

$$\Phi = \left(\prod_{i=2}^{l} \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{k=1}^{n_{ij}} \left(\pi_{ijk} \left(q_{ij1}, \dots, q_{ijn_{ij}}, v_{ij1}, \dots, v_{ijn_{ij}}, p_{ij}, p_{th} \right) - \pi_{ijk}^{*} \right)^{\alpha_{ijk}} \right) *$$

$$* \left(\prod_{k=1}^{n_{11}} \left(\pi_{11k} \left(q_{111}, \dots, q_{11n_{11}}, v_{111}, \dots, v_{11n_{11}}, p_{11} \right) - \pi_{11k}^{*} \right)^{\alpha_{11k}} \right), \tag{2.4.3}$$

$$p_{th} \colon (i, j) \in S_h^t.$$

Таким образом, мы получаем задачу оптимизации (2.4.4) при условиях (2.4.5) – (2.4.9):

$$\max_{q_{ijh},p_{ij}}\left[\left(\prod_{i=2}^{l}\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{k=1}^{n_{ij}}\left(\pi_{ijk}\left(q_{ij1},\dots,q_{ijn_{ij}},v_{ij1},\dots,v_{ijn_{ij}},p_{ij},p_{th}\right)-\pi_{ijk}^{*}\right)^{\alpha_{ijk}}\right)* \right.$$
$$\left. *\left(\prod_{k=1}^{n_{11}}\left(\pi_{11k}\left(q_{111},\dots,q_{11n_{11}},v_{111},\dots,v_{11n_{11}},p_{11}\right)-\pi_{11k}^{*}\right)^{\alpha_{11k}}\right)\right], \tag{2.4.4}$$
$$p_{th}\colon (i,j)\in S_h^t;$$

$$\pi_{ijk}\geq\pi_{ijk}^{*},\qquad i=\overline{1,l},\qquad j=\ \overline{1,m_{\iota}},\qquad k=\overline{1,n_{\iota j}}; \tag{2.4.5}$$

$$p_{lj}=a_{lj}-b_{lj}\sum_{k=1}^{n_{lj}}q_{ljk}\,,\qquad j=\overline{1,m_l}; \tag{2.4.6}$$

$$\sum_{r=1}^{n_{th}}q_{thr}=\sum_{i,j:(i,j)\in S_h^t}\ \sum_{k=1}^{n_{ij}}q_{ijk}\,,\ \ t,h\colon x_h^t\notin X_l; \tag{2.4.7}$$

$$q_{ijk}\geq 0,\qquad i=\overline{1,l},\qquad j=\ \overline{1,m_{\iota}},\qquad k=\overline{1,n_{\iota j}}; \tag{2.4.8}$$

$$p_{lj}\geq 0,\qquad j=\overline{1,m_{\iota}}. \tag{2.4.9}$$

где α_{ijk} – заданные числа, такие, что:

$$\alpha_{ijk}>0,\qquad \forall\, i=\overline{1,l},\qquad \forall\, j=\ \overline{1,m_{\iota}},\qquad \forall\, k=\overline{1,n_{\iota j}}, \tag{2.4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\alpha_{ijk}=1; \tag{2.4.10}$$

Для решения этой задачи оптимизации была написана программа в среде MATLAB (Приложение 1), реализующая итеративный поиск оптимального решения при заданных ограничениях типа равенств и неравенств с использованием метода последовательного квадратичного программирования как наиболее эффективного метода условной оптимизации нелинейной функции.

2.5. Сравнение взвешенного арбитражного решения Нэша с ранее рассмотренными решениями на основе численного моделирования

Вернемся к примеру, изученному в третьем параграфе этой главы, т.е. рассмотрим цепь поставок, изображенную на Рис. 2.3.1 с параметрами, приведенными в табл. 2.3.1.

Для этой цепи поставок с приведенными параметрами найдем поток d^N, являющийся решением задачи (2.4.4) – (2.4.9), где в качестве весовых коэффициентов взяты следующие числа:

$$\alpha_{111} = \alpha_{112} = \frac{1}{3};$$
$$\alpha_{211} = \frac{2}{9}; \tag{2.5.1}$$
$$\alpha_{311} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{314} = \alpha_{321} = \alpha_{322} = \frac{1}{54}.$$

Для наглядного сравнения приведем в одной таблице (табл. 2.5.1) значения переменных, полученные при нахождении равновесия по Нэшу в децентрализованной модели, а также при решении задач условной оптимизации (2.1.1) – (2.1.5) и (2.4.4) – (2.4.9) централизованной цепи поставок.

Таблица 2.5.1. Значения переменных и прибыли

	Равновесие по Нэшу	Решение задачи максимизации общей прибыли цепи поставок	Взвешенное арбитражное решение Нэша
Узел x_1^1			
Объем выпуска	$q_{111} \approx 7923$ $q_{112} \approx 7888$	$q_{111} \approx 27566$ $q_{112} \approx 0$	$q_{111} \approx 13629$ $q_{112} \approx 13126$
Цена	$p_{11} \approx 2648$	$p_{11} \approx 1553$	$p_{11} \approx 2402$

Продолжение таблицы 2.5.1

Прибыль участников	$\pi_{111} \approx 9092365$ $\pi_{112} \approx 9013310$	$\pi_{111} \approx 60461350$ $\pi_{112} \approx 0$	$\pi_{111} \approx 12299768$ $\pi_{112} \approx 11780161$
Узел x_1^2			
Объем выпуска	$q_{211} \approx 9375$	$q_{211} \approx 21242$	$q_{211} \approx 21441$
Цена	$p_{21} \approx 4613$	$p_{21} \approx 0$	$p_{21} \approx 3716$
Прибыль участников	$\pi_{211} \approx 118664742$	$\pi_{211} \approx 16198593$	$\pi_{211} \approx 13144816$
Узел x_1^3			
Объем выпуска	$q_{311} \approx 1606,$ $q_{312} \approx 1614,$ $q_{313} \approx 1622,$ $q_{314} \approx 1594$	$q_{311} \approx 0,$ $q_{312} \approx 0,$ $q_{313} \approx 6324,$ $q_{314} \approx 0$	$q_{311} \approx 696$ $q_{312} \approx 1193$ $q_{313} \approx 2424$ $q_{314} \approx 1001$
Цена	$p_{31} \approx 3391$	$p_{31} \approx 3419$	$p_{31} \approx 3671$
Прибыль участников	$\pi_{311} \approx 644733$ $\pi_{312} \approx 651173$ $\pi_{313} \approx 657644$ $\pi_{314} \approx 635134$	$\pi_{311} \approx 0$ $\pi_{312} \approx 0$ $\pi_{313} \approx -4285648$ $\pi_{314} \approx 0$	$\pi_{311} \approx 644770$ $\pi_{312} \approx 1108408$ $\pi_{313} \approx 2256850$ $\pi_{314} \approx 925272$
Узел x_2^3			
Объем выпуска	$q_{321} \approx 4699,$ $q_{322} \approx 4677$	$q_{321} \approx 21242,$ $q_{322} \approx 0$	$q_{321} \approx 12018$ $q_{322} \approx 9423$
Цена	$p_{32} \approx 5156$	$p_{32} \approx 4088$	$p_{32} \approx 4070$
Прибыль участников	$\pi_{321} \approx 1987132$ $\pi_{322} \approx 1968381$	$\pi_{321} \approx -24758272$ $\pi_{322} \approx 0$	$\pi_{321} \approx 2821735$ $\pi_{322} \approx 2193425$
Общая прибыль цепи:	$\approx 3,65 * 10^7$	$\approx 4,76 * 10^7$	$\approx 4,72 * 10^7$

Из результатов, приведенных в таблице 2.5.1, видно, что взвешенное арбитражное решение Нэша увеличило общую прибыль цепи поставок примерно на 29% от значения прибыли на равновесии по Нэшу в децентрализованной модели. Это чуть хуже, результата, получаемого решением задачи максимизации общей прибыли цепи поставок, однако взвешенное арбитражное решение Нэша гарантирует каждому из участников положительную прибыль и не требует процедуры дележа.

Выводы

В рамках данной работы мы исследовали цепи поставок с древовидной дистрибутивной структурой, где каждый узел этой цепи представляет собой совокупность конкурирующих фирм, производящих и потребляющих однородный продукт и имеющие разные затраты на производство, при этом сами узлы между собой не конкурируют. Предполагалось, что рынки, на которых реализуют товар концевые узлы, не конкурируют между собой и функционируют по модели Курно с линейными функциями спроса. Нами изучался вопрос координации участников, т.е. проблема выбора стратегий, удовлетворяющих заданному критерию оптимальности, с точки зрения двух моделей организации взаимодействия в цепи поставок: когда участники ведут себя децентрализовано – независимо друг от друга, и централизовано – имея общую цель.

Нами была произведена математическая формализация многоуровневых древовидных цепей поставок с помощью древовидного графа. Для децентрализованной модели таких цепей задача координации участников свелась к нахождению абсолютного равновесия по Нэшу в многоуровневой иерархической игре с полной информацией, для которой мы построили алгоритм нахождения этого равновесного решения.

Для централизованного случая цепей поставок с рассматриваемой структурой, задача координации была сформулирована как задача нелинейной условной оптимизации. Далее нами был исследован вопрос существования решения данной задачи и построен итеративный алгоритм его нахождения. Численное моделирование выявило, что централизованный подход дает увеличение общей прибыли цепи поставок в среднем на 25%, но не гарантирует всем участникам положительную прибыль, т.е. требует введения системы дележей.

Анализ получаемых на основе численного моделирования результатов подтолкнул нас на поиск альтернативного подхода к координированию централизованной цепи поставок. В качестве такого подхода было выбрано взвешенное арбитражное решение Нэша, которое, как было выяснено экспериментально, дает хоть и меньший выигрыш в прибыли, чем рассмотренная ранее формулировка, но зато гарантирует всем участникам положительную прибыль.

Результатом работы, помимо всего прочего, стало также написание программы в среде MATLAB для автоматизации вычислений и нахождения всех трех предложенных вариантов решений.

Резюмируя выше сказанное, можно заключить, что сформулированные нами задачи полностью решены, и поставленные цели достигнуты.

Список литературы

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. Изд. 2-е. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 432 с.
2. Adida E., DeMiguel V. Supply Chain competition with multiple manufacturers and retailers // Operation Research, 2011. Vol. 59, №1. P.156-172.
3. Cachon G.P. Supply chain coordination with contracts // Handbooks in Operations Research & Management Science, 2003. Vol. 11. P. 227-339.
4. Carr M.S., Karmarkar U.S. Competition in multi-echelon assembly supply chains // Management Science, 2005. Vol. 51. P. 45-59
5. Cho S.-H. Horizontal mergers in multi-tier decentralized chains // Management Science, 2014. Vol. 51. P. 45-59.
6. Corbett C., Karmarkar U.S. Competition and structure in serial supply chains with deterministic demand // Management science, 2001. № 47. P. 966-978.
7. Kaya M., Ozer O. Pricing in business-to-business contracts: sharing risk, profit and information // The Oxford Handbook of Pricing Management. Oxford: Oxford University Press, 2012. P. 738-783.
8. Laseter T., Oliver K. When will supply chain management grow up? // Strategy+business, 2003. Issue 32.
9. Tyagi R.K. On the effect of downstream entry // Management science, 1999. № 45. P. 59-73
10. Vickers J. Competition and regulation and vertically related markets // Review of economics study, 1995. № 62. P. 1-17.
11. Zhou D., Karmarkar U.S., Jiang B. Competition in multi-echelon distributive supply chains with linear demand // International Journal of Production Research, 2015. Vol. 53, № 22. P. 6787-6807
12. Ziss S. Vertical separation and horizontal mergers // Journal of industrial economics, 1995. №43. P. 63-75.

Приложения

Приложение 1. Код программы в среде MATLAB

```
function [] = SupplyOptimisation(Gr,N,v,a,b)
%Gr - матрица связок;N - массив данных о количестве фирм в узлах
%v – массив величин затрат на производство единицы товара
%a,b – массив параметров спроса
k = length(Gr);
%определяем кол-во концевых узлов, их номера и номера верх
лежащих узлов
kk = 0;
weight = 0;%веса для обобщенного решения
for i=1:k
    if (Gr(:,i)== zeros(k,1))
        kk = kk+1;
        ki(kk) = i;
        [~,pp] = max(Gr(i,:));
        verh(kk) = pp;
        weight = weight+N(i);
    end
end
sequence = ki;
% сортируем концевые узлы по глубине
for j=1:length(ki)-1
    sig = 0;
    temp = j;
    for jj=(j+1):length(ki)
        if verh(jj)>verh(temp)
            temp = jj;
            sig = 1;
        end
    end
    if sig==1
        verh=[verh(1:j-1),verh(temp),verh(j:temp-1),
verh(temp+1:end)];
```

```
        ki = [ki(1:j-1),ki(temp),ki(j:temp-1),ki(temp+1:end)];
    end
end
%удалим повторяющиеся узлы
verhcopy = verh;i = 1;
while (i<length(verhcopy))
    ii = i+1;
    while (ii<=length(verhcopy))
        if (verhcopy(ii)==verhcopy(i))
            verhcopy(ii) = [];
        else
            ii = ii+1;
        end
    end
    i = i+1;
end
for i=1:length(verhcopy)
    if (verhcopy(i) == 1)
        verhcopy(i) = [];
        i = i-1;
    end
end
if (~isempty(verhcopy))
    sequence = [sequence;verhcopy,zeros(1,length(sequence)-
length(verhcopy))];
end

%создаем символьные переменные кол-во товара и секторные цены
qd = sym('qd',[k max(N)]);p1 = sym('p1',[1 k]);
p2 = p1;
A = ones(k,max(N));
for i=1:k
    for j=(N(i)+1):max(N)
        qd(i,j) = 0;
        A(i,j) = 0;
```

```
    end
end
qc = qd;
Q = sum(qc,2);

%строим функции спроса в конечных узлах
for i=1:kk
    p1(ki(i)) = a(ki(i))-b(ki(i))*sum(qd(ki(i),:));
    pe(i) = p2(ki(i))-p1(ki(i));
end
index = 1;
Pi = 0;
condind = 1;
%в децентрализ. модели для всех концевых узлов определяем
количество заказа
for sig = 1:length(ki)
    i = ki(sig);
    up = verh(sig);
    uporder(index) = up;
    index = index+1;
    ii = 0;
    for j=1:N(i)  %строим систему уравнений
        PIij = qd(i,j)*(p1(i)-p1(up)-v(i,j));
        DPIij(j) = diff(PIij,qd(i,j));
        Pi = Pi+PIij;
        nashcond(i,j) = PIij;
    end
    qtemp = DPIij.';
    for j=1:N(i)%прямой ход
        qtemp(j) = simplify(solve(qtemp(j)==0,qd(i,j)));
        for jj=j+1:N(i);
            qtemp(jj) = subs(qtemp(jj),qd(i,j),qtemp(j));
        end
    end
    for j=(N(i)-1):-1:1%обратный ход
```

```
        for jj=N(i):-1:(j+1)
            qtemp(j) =
simplify(subs(qtemp(j),qd(i,jj),qtemp(jj)));
        end
    end
    for j=1:N(i)%приписываем новое значение количествам заказа
        p1 = subs(p1,qd(i,j),qtemp(j));
        ii = subs(ii,qd(i,j),qtemp(j));
        qd(i,j) = simplify(qtemp(j));
    end
    ii = simplify(ii);
    Q1(i) = sum(qd(i,:));
    clear DPIij;
end
%в децентр. модели определяем параметры для всех промежуточных
узлов
clear verh;
jj = 1;
ki = 0;
while(~isempty(verhcopy))
    qtemp = verhcopy(1);
    [~,pp(jj)] = max(Gr(qtemp,:)); %определяем верх лежащий для
verhcopy(1)
    uporder(index) = pp(jj);
    index = index+1;
    sig = 1;
    %определяем все низ лежащие узлы для verhcopy(1) и общее
кол-во заказа
    kk = 0;
    for j=1:k
        if (Gr(j,qtemp)~=0)
            Q1(qtemp) = Q1(qtemp)+Q1(j);
            kk = kk-Q(j);
            ii(sig) = j;
            sig = sig+1;
```

```
        end
    end
    QC(qtemp) = Q(qtemp)+kk;
    sig = solve(sum(qd(qtemp,:))==Q1(qtemp),p1(qtemp));
    for i=1:N(qtemp)%строим систему уравнений
        PIij = qd(qtemp,i)*(sig-p1(pp(jj))-v(qtemp,i));
        DPIij(i) = diff(PIij,qd(qtemp,i));
        nashcond(qtemp,i) = qd(qtemp,i)*(p1(qtemp)-p1(pp(jj))-
v(qtemp,i));
        Pi = Pi+nashcond(qtemp,i);
    end
    for i=1:N(qtemp)%прямой ход
        DPIij(i) = simplify(solve(DPIij(i)==0,qd(qtemp,i)));
        for j=i+1:N(qtemp)
            DPIij(j) = subs(DPIij(j),qd(qtemp,i),DPIij(i));
        end
    end
    for i=(N(qtemp)-1):-1:1%обратный ход
        for j=N(qtemp):-1:(i+1)
            DPIij(i) =
simplify(subs(DPIij(i),qd(qtemp,j),DPIij(j)));
        end
    end
    for i=1:N(qtemp)%приписываем новое значение количествам
заказа
        sig = subs(sig,qd(qtemp,i),DPIij(i));
        qd(qtemp,i) = DPIij(i);
    end
    Q1 = subs(Q1,p1(qtemp),sig);
    qd = subs(qd,p1(qtemp),sig);
    p1 = subs(p1,p1(qtemp),sig);
    p1(qtemp) = sig;
    jj = jj+1;
    % убираем рассмотренный узел
    ki = ki+N(verhcopy(1));
```

```
    verhcopy(1) = [];
    if (isempty(verhcopy))
        i =1;
        weight(end+1) = ki;
        ki = 0;
        while (i<=length(pp))
            if (pp(i) == 1)
                pp(i) = [];
            else
                i = i+1;
            end
        end
        verhcopy = pp;
        if (~isempty(verhcopy))
            sequence =
[sequence;verhcopy,zeros(1,length(sequence)-length(verhcopy))];
        end
        pp = [];
        jj = 1;
    end
end
sequence = flip(sequence);
%в децентр. модели определяем объемы для корневого узла
weight(end+1) = N(1);
ki = (flipud(weight.')).';
weight = -sort(-weight)./ki;
kk = 0;
for i=1:k
    if (Gr(i,1)==1)
        Q1(1) = Q1(1)+Q1(i);
        kk = kk-Q(i);
    end
end
QC(1) = Q(1)+kk;
i = 1;
```

```
while i<=length(QC)
    if QC(i)==0
        QC(i) = [];
    else i = i+1;
    end
end
QC = [QC,pe];
clear DPIij;
sig = solve(sum(qd(1,:))==Q1(1),p1(1));
verh = subs(p1(1),p1(1),sig);
%составляем систему
for i=1:N(1)
    PIij = qd(1,i)*(sig-v(1,i));
    DPIij(i) = diff(PIij,qd(1,i));
    Pi = Pi+qd(1,i)*(p2(1)-v(1,i));
    nashcond(1,i) = qd(1,i)*(p2(1)-v(1,i));
end
%прямой ход
for i=1:N(1)
    DPIij(i) = simplify(solve(DPIij(i)==0,qd(1,i)));
    for j=i+1:N(1)
        DPIij(j) = subs(DPIij(j),qd(1,i),DPIij(i));
    end
end
%обратный ход
for i=(N(1)-1):-1:1
    for j=N(1):-1:(i+1)
        DPIij(i) = simplify(subs(DPIij(i),qd(1,j),DPIij(j)));
    end
end
%приписываем новое значение количествам заказа
for i=1:N(1)
    Q1 = vpa(subs(Q1,qd(1,i),DPIij(i)));
    verh = subs(verh,qd(1,i),DPIij(i));
    qd(1,i) = DPIij(i);
```

```
end
%подставляем найденные значения в другие параметры
Q1 = vpa(subs(Q1,p1(1),verh));
qd = subs(qd,p1(1),verh);
p1 = subs(p1,p1(1),verh);
p1 = double(p1.');
NF = 1;
weight = weight/sum(N);
ncondind = 1;
%считаем прибыль
for i=1:N(1)
    profit1(1,i) = qd(1,i)*(p1(1)-v(1,i));
    NF = NF*((qc(1,i)*(p2(1)-v(1,i))-profit1(1,i))^weight(1));
    ncond(ncondind) = nashcond(1,i)-profit1(1,i);
    ncondind = ncondind+1;
end
for i=2:k
    [~,jj]= max(Gr(i,:));
    [ki,~] = find(sequence==i);
    ki = ki+1;
    for j=1:N(i)
        profit1(i,j) = qd(i,j)*(p1(i)-p1(jj)-v(i,j));
        NF = NF*((qc(i,j)*(p2(i)-p2(jj)-v(i,j))-
profit1(i,j))^weight(ki));
        ncond(ncondind) = nashcond(i,j)-profit1(i,j);
        ncondind = ncondind+1;
    end
end
NF = -NF;
nashcond = ncond;
clear ncond*;
profit1 = double(profit1);
DecentChainProfit = sum(sum(profit1));
cond = -Pi+DecentChainProfit;
```

```
clear fp;clear DPIij;clear PIij;clear i;clear ii;clear
index;clear nashind;clear j;clear jj;clear kk;clear pp;clear
qtemp;clear  sig;clear temp;clear up;clear uporder;clear
verh;clear pe;clear verhcopy;clear Q2;clear Q;
for i=1:k
    for j=1:max(N)
        if A(i,j)~=0
            cond(end+1) = -qc(i,j);
            nashcond(end+1) = qc(i,j);
        end
    end
end
cond = [cond.';-p2.'];
nashcond = [-nashcond.';-p2.'];
Pi = simplify(-Pi);
dipData = 'dipData';
qcopy = qc;
qc = [qc,p2.'];
A = [A,ones(k,1)];
save(dipData,'Pi','cond','qc','QC','A','NF','N','nashcond');
qd = double([qd,p1]);
[a,b] = size(qc);
decent = [Q1.', vpa(p1)]
DecentChainProfit
%решение задачи максимизации общей прибыли цепи
options = optimoptions('fmincon','Algorithm','interior-point');
qcent=fmincon('OptimFun',qd,[],[],[],[],[],[],'Cons',options);
%решение задачи максимизации взвешенного произведения Нэша
options = optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp');
qn = fmincon('NashFun',qcent,[],[],[],[],[],[],'NCons',options);
%считаем прибыли цепи
ncondind = 1;
for i=1:N(1)
    profit2(1,i) = qcent(1,i)*(qcent(1,end)-v(1,i));
    profit3(1,i) = qn(1,i)*(qn(1,end)-v(1,i));
end
```

```
for i=2:k
    [~,jj]= max(Gr(i,:));
    for j=1:N(i)
       profit2(i,j) = qcent(i,j)*(qcent(i,end)-qcent(jj,end)-
v(i,j));
       profit3(i,j) = qn(i,j)*(qn(i,end)-qn(jj,end)-v(i,j));
    end
end
%выводим результаты
decent = [Q1.', vpa(p1)]
profit1%прибыль каждого участникав децентр. модели
DecentChainProfit%прибыль всей цепи
qcentr = [sum(qcent(:,1:(end-1)),2),qcent(:,end)]
profit2%прибыль каждого в центр. модели
CentrChainProfit2 = sum(sum(profit2)) %прибыль центр.цепи
CentrChainProfit2*100/DecentChainProfit-100
qnash = [sum(qn(:,1:(end-1)),2),qn(:,end)]
profit3 %прибыль каждого при взвеш. решении
CentrChainProfit3 = sum(sum(profit3)) %прибыль всей цепи при
взвеш. решении
CentrChainProfit3*100/DecentChainProfit-100
```

Приложение 2. Коды функций, вызываемых в программе

1.
```
function f = OptimFun(x)
temp = load('dipData');
[a,b] = size(temp.qc);
Pi = temp.Pi;
qd = temp.qc;
for i=1:a
    for j=1:b-1
      Pi = subs(Pi,qd(i,j),x(i,j));
    end
end
for i=1:a
    Pi = subs(Pi,qd(i,b),x(i,b));
end
f = double(Pi);
end
```

2.
```
function [c,ceq] = Cons(x)
temp = load('dipData');
[a,b] = size(temp.qc);
cond = temp.cond;
qd = temp.qc;
A = ones(a,b)-temp.A;
ceq = temp.QC;
N = temp.N;
cn = length(ceq)+1;
for i=1:a
    for j=1:N(i)
        cond = subs(cond,qd(i,j),x(i,j));
        ceq = subs(ceq,qd(i,j),x(i,j));
    end
    for j=1:b-1
        if A(i,j)~=0
            ceq(cn) = x(i,j);
            cn = cn+1;
        end
    end
end
for i=1:a
    cond = subs(cond,qd(i,b),x(i,b));
    ceq = subs(ceq,qd(i,b),x(i,b));
end
c = double(cond);
ceq = double(ceq);
end
```

3.
```
function n = NashFun(x)
temp = load('dipData');
[a,b] = size(temp.qc);
NF = temp.NF;
qd = temp.qc;
N = temp.N;
for i=1:a
    for j=1:N(i)
        NF = subs(NF,qd(i,j),x(i,j));
    end
end
for i=1:a
    NF = subs(NF,qd(i,b),x(i,b));
end
n = double(NF);
n = abs(n);
end
```

4.
```
function [c,ceq] = NCons(x)
temp = load('dipData');
[a,b] = size(temp.qc);
nashcond = temp.nashcond;
qd = temp.qc;
A = ones(a,b)-temp.A;
ceq = temp.QC;
N = temp.N;
cn = length(ceq)+1;
for i=1:a
    for j=1:N(i)
        nashcond = subs(nashcond,qd(i,j),x(i,j));
        ceq = subs(ceq,qd(i,j),x(i,j));
    end
    for j=1:b-1
        if A(i,j)~=0
            ceq(cn) = x(i,j);
            cn = cn+1;
        end
    end
end
for i=1:a
    nashcond = subs(nashcond,qd(i,b),x(i,b));
    ceq = subs(ceq,qd(i,b),x(i,b));
end
c = double(nashcond);
ceq = double(ceq);
end
```